Teorema 1. *Principio del Buen Orden Si A es un subconjunto de números naturales, entonces A tiene un elemento mínimo.*

Demostración. Supongamos que A no tiene un elemento mínimo. Sea $B \subset \mathbb{N}$ tal que $1, 2, 3, ..., n \notin A$ entonces $1, 2, ..., n \in B$
(1) Se tiene que $1 \in B$ pues si $1 \in A$, A tendría un elemento mínimo.
(2) Si $1, 2, 3, ..., k \notin A$ entonces $k+1 \notin A$ pues de otra forma $k+1$ sería el elemento mínimo de A.
Por lo tanto $k+1 \in B$ y de esta manera B es inductivo y por tanto $\mathbb{N} \subset B$ y en consecuencia $A = \emptyset$ □

Propiedad Arquimediana

Definición 1. *En un campo ordenado F, decimos que F es arquimediano si satisface*

$$\forall\, x \in F,\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > x$$

Teorema 2. *Sea F un campo ordenado. Las siguientes propiedades son equivalentes a la propiedad arquimediana*

$$(a)\ \ \forall\, x > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > x$$

$$(b)\ \ Si\ \ a > 0\ \ entonces\ \ \forall\, x \in F,\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ na > x$$

$$(c)\ \ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ \frac{1}{n} < \epsilon$$

Demostración. $a \Rightarrow$ *propiedad arquimediana*
tenemos que

$$\forall\, x \in F,\ \ x \neq 0,\ \ se\ \ cumple\ \ x > 0\ \ ó\ \ x < 0$$

Caso $x > 0$
En este caso por hipotesis

$$\forall\, x > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > x$$

Caso $x < 0$
En este caso se tiene $-x > 0$ y por hipotesis

$$\forall\ -x > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > -x\ \ \Rightarrow\ \ n > -x > x\ \ \Rightarrow\ \ n > x$$

En el caso de $x = 0$ sabemos que $1 > 0$ por lo tanto $\exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > x$ por lo tanto $\forall\, x \in F,\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > x$
propiedad arquimediana $\Rightarrow$ *b*
Supongamos que F satisface la propiedad arquimediana y $a > 0$. Entonces $\forall\, x \in F$ se tiene que $\frac{x}{a} \in F$ y por la propiedad arquimediana

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > \frac{x}{a}\ y\ como\ \ a > 0\ \ na > x$$

$b \Rightarrow\ c$
Supongamos que se cumple

$$Si\ \ a > 0\ \ entonces\ \ \forall\, x \in F,\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ na > x$$

Sea $\epsilon > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\epsilon} > 0$ tomando $x = \dfrac{1}{\epsilon}$

$$\exists \;\; n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; n > x = \frac{1}{\epsilon} \;\Rightarrow\; \epsilon > \frac{1}{n}$$

$c \;\Rightarrow\; a$

Supongamos que se cumple

$$\forall \; \epsilon > 0, \; \exists \; n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; \frac{1}{n} < \epsilon$$

si $\epsilon > 0$ entonces $\epsilon^{-1} > 0$ y podemos tomar $x = \epsilon^{-1}$
por lo tanto según (c)

$$\exists \;\; n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; \frac{1}{n} < \epsilon \;\Rightarrow\; \frac{1}{\epsilon} < n \;\Rightarrow\; x < n$$

por lo tanto

$$\forall \; x > 0, \;\; \exists \;\; n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; n > x$$

$\square$