Derivada Implicita

El círculo de radio 1 con centro en el origen, puede representarse implícitamente mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ ó explícitamente por las ecuaciones $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = -\sqrt{1 - x^2}$.
Una representación explícita de una curva del plano *xy* esta dada por un par de ecuaciones que expresan *y* en términos de *x* ó *x* en términos de *y* y son de la forma *y=g(x)* ó *x=g(y)*.

Ejemplo

$$y = x \operatorname{sen}\ x$$

Ejemplo

$$y = 5 - \frac{5}{3}x$$

Ahora bien existen ecuaciones como

$$x^4 - 4x^2 + y^2 = 0$$

En las que ninguna variable está en forma explícita. Se dice entonces que dicha ecuación define implicitamente una variable en términos de la otra.
Sin embargo existen procedimientos para calcular la derivada de este tipo de funciones, tal procedimento se conoce como *derivación implicita*

Ejemplo Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ para

$$y^5 + y + x = 0$$

Solución Para esto se deriva respecto a x en ambos lados

$$\frac{d}{dx}\left(y^5 + y + x\right) = \frac{d}{dx}(0) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left(y^5\right) + \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(x) = 0 \;\Rightarrow\; 5y^4\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}\left(5y^4 + 1\right) = -1 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{5y^4 + 1}$$

Ejemplo Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ para

$$y^2x^2 + x^3 = 4$$

Solución Para esto se deriva respecto a x en ambos lados

$$\frac{d}{dx}\left(y^2x^2 + x^3\right) = \frac{d}{dx}(4) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left(y^2x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 0 \;\Rightarrow\; 2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2xy^2}{2x^2y}$$

Ejemplo Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ para

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Solución Para esto se deriva respecto a x en ambos lados

$$\frac{d}{dx}\left(x^3+y^3-3axy\right)=\frac{d}{dx}(0)\;\Rightarrow\;\frac{d}{dx}\left(x^3\right)+\frac{d}{dx}\left(y^3\right)-\frac{d}{dx}(3axy)=0\;\Rightarrow\;3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3ay-3ax\frac{dy}{dx}=0\;\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2-3ax\right)=-3x^2-3ay\;\Rightarrow\;\frac{dy}{dx}\frac{-3x^2+3ay}{3y^2-3ax}$$

En general, una representación implícita de una curva del plano xy esta dada por una sola ecuación en *x,y* de la forma *F(x,y)=0*. Si derivamos ambos miembros usando regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d\ F}{dx}+\frac{d\ F}{dy}\frac{dy}{dx}=0\;\Rightarrow\;\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{d\ F}{dx}}{\frac{d\ F}{dy}}$$

Ejemplo Hallar $\frac{dy}{dx}$ para

$$y^2\cos\ x=a^2\operatorname{sen}\ 3x$$

Solución En este caso

$$F(x,y)=y^2\cos\ x-a^2\operatorname{sen}\ 3x$$

por lo que

$$\frac{d\ F}{dx}=-3a^2\cos\ 3x-y^2\operatorname{sen}\ x\quad y\quad\frac{d\ F}{dy}=2y\cos\ x$$

por lo tanto

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{d\ F}{dx}}{\frac{d\ F}{dy}}=-\frac{-3a^2\cos\ 3x-y^2\operatorname{sen}\ x}{2y\cos\ x}$$

El ejemplo anterior muestra como podemos hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$, de la ecuación

$$y^2\cos\ x=a^2\operatorname{sen}\ 3x$$

aunque no tengamos una representación explicita de la forma $y=f(x)$.
Si en la ecuación

$$y^5+y+x=0$$

hacemos $y=f(x)$ tenemos entonces

$$[f(x)]^5+[f(x)]+x=0$$

y podemos plantear la derivación implicita de la siguiente forma.
Demostrar que existe una función diferenciable f tal que

$$[f(x)]^5+f(x)+x=0\quad\forall\ x$$

Demostración. Sea $g(x) = -x^5 - x$ la cual es una función que es monotona pues

$$si \quad x < y \Rightarrow x^5 < y^5 \Rightarrow x^5 + x < y^5 + x < y^5 + y \Rightarrow -x^5 - x > -y^5 - y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

y por tanto f es monotona y en consecuencia uno-uno, asi que admite una inversa a la que llamamos $f = g^{-1}\ \forall\ x$, ademas

$$g'(x) = -5x^4 - 1 < 0 \quad \forall\ x$$

y por tanto se tiene que

$$x = g(f(x)) = -[f(x)]^5 - f(x) \quad \forall \quad x \Rightarrow [f(x)]^5 + f(x) + x = 0 \quad \forall\ x$$

y tal función f existe y es derivable.

$\square$

En el planteamiento anterior usamos varios conceptos

Monotonía Usemos el siguiente resultado
Si $f'(x) > 0$ entonces f es creciente,
Para comprobar esto tenemos que

$$f'(x) > 0 \ \Rightarrow\ \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \ \Rightarrow\ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0$$

entonces ocurre

$$\begin{pmatrix} f(x+h) - f(x) > 0 & y & h > 0 \\ f(x+h) - f(x) < 0 & y & h < 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x < x+h & y & f(x) < f(x+h) \\ x+h < x & y & f(x+h) < f(x) \end{pmatrix}$$

en cualquier caso se tiene que f es una función creciente, por lo tanto si $f'(x) > 0$ entonces f es creciente.
El caso $f'(x) < 0$ es analogo, concluimos entonces que f es monotona si $f'(x) \neq 0$

Función inversa Usamos el resultado
Si f es monotona entonces existe f^{-1}

Derivada de la función inversa Al definir $f = g^{-1}$ tenemos que

$$f'(x) = \left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(f(x))}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que existe una función diferenciable $f = g^{-1}$ tal que

$$[f(x)]^5 + f(x) + x = 0 \quad \forall\ x$$

Ejercicio Use lo anterior para demostrar que existe una función diferenciable $f(x)$ tal que

$$[f(x)]^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$$

Solución (1) Definimos una función g(x) en este caso

$$g(x)=\left(a^{\frac{1}{2}}-[x]^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$$

(2) Derivamos $g(x)$, en este caso

$$g'(x)=\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

se tiene que

$$g'(x)\neq 0 \quad si \quad x\neq a$$

en estos valores $g'(x)\neq 0$ y por tanto g es monotona, en consecuencia existe la función inversa g^{-1}
(3) Definimos $f=g^{-1}$ y tenemos que

$$g(x)=\left(a^{\frac{1}{2}}-[x]^{\frac{1}{2}}\right)^{2} \;\Rightarrow\; g(f(x))=\left(a^{\frac{1}{2}}-[f(x)]^{\frac{1}{2}}\right)^{2} \;\Rightarrow$$

$$x=\left(a^{\frac{1}{2}}-[f(x)]^{\frac{1}{2}}\right)^{2} \;\Rightarrow\; x^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-[f(x)]^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; [f(x)]^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$$

de esta manera hemos demostrado la existencia de una función $f(x)$ que cumple la ecuación.
(4) Vamos a derivar, en este caso

$$f'(x)=\left(g^{-1}\right)'=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}=\frac{1}{g'(f(x))}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(a^{\frac{1}{2}}-(f(x))^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}(f(x))^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

concluimos entonces que f es diferenciable.