Derivada de la Función Inversa

Teorema 1. *$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ tiene derivada en $x_0\in(a,b)\Leftrightarrow$ para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de (a,b) con $\{x_n\}\to x_0$ se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(x_0)$$

Demostración. $\Rightarrow$)Como f es derivable en x_0. Entonces dada $\epsilon>0\ \exists\quad\delta>0$ tal que

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\epsilon\quad siempre\quad que\quad 0<|x-x_0|<\delta$$

Por otro lado si $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria con $\{x_n\}\to x_0$ entonces existe $N_\epsilon\in\mathbb{N}$ tal que $\forall\ \ n>N_\epsilon$ se tiene que $|x_n-x_0|<\epsilon$. Pero si en esta última relacion tomamos $|x_n-x_0|<\delta$ entonces se tendría que

$$\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-f'(x_0)\right|<\epsilon\quad\forall\ \ n>N_\epsilon$$

por tanto

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(x_0)$$

$\Leftarrow$)Sea

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(x_0)\quad y\quad\{x_n\}\to x_0$$

Supongámos que f no es derivable en x_0, entonces

$$\exists\quad\epsilon>0\quad\ni\quad\forall\quad\delta>0\quad si\quad 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|\geq\epsilon$$

Ahora tomemos $x_1\in(a,b)$ tal que

$$0<|x_1-x_0|<1\Rightarrow\left|\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}-f'(x_0)\right|\geq\epsilon$$

Ahora tomemos $x_2\in(a,b)$ tal que

$$0<|x_2-x_0|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}-f'(x_0)\right|\geq\epsilon$$

Ahora tomemos $x_3\in(a,b)$ tal que

$$0<|x_3-x_0|<\frac{1}{3}\Rightarrow\left|\frac{f(x_3)-f(x_0)}{x_3-x_0}-f'(x_0)\right|\geq\epsilon$$

continuando este proceso se tiene que para el término general Ahora tomemos $x_n\in(a,b)$ tal que

$$0<|x_n-x_0|<\frac{1}{n}\Rightarrow\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-f'(x_0)\right|\geq\epsilon$$

pero esto contradice la hipótesis, pues tenemos $\{x_n\} \to x_0$ y se debe cumplir

$$\left| \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} - f'(x_0) \right| < \epsilon$$

por tanto suponer que f no es derivable en x_0 lleva a contradicción y en consecuencia f es derivable en x_0 $\square$

Ya vimos que una función f es derivable en x_0 si y solo si para toda sucesión $\{x_n\} \to x_0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$$

Supoónga ahora que f es uno-uno y continua en (a, b). Vamos a probar que si f es derivable en $x_0 \in (a, b)$ y $f'(x_0) \neq 0$ entonces f^{-1} es derivable en $f(x_0)$ y

$$\left[f^{-1}\right]'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Demostración. Hagamos $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $y_n = f(x_n)$ y $x_n = f^{-1}(y_n)$, donde y_n es una sucesión que converge a y_0
tenemos entonces que:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}}$$

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Por lo tanto

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$\square$

De lo anterior tenemos que

$$\left(f^{-1}\right)'(x_0) = \left(f^{-1}\right)'\left(f^{-1}(f(x_0))\right) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Ejemplo Hallar $\arccos'(x)$

Solución Para esto tenemos que
Si $f(x) = \cos(x)$ entonces $f^{-1}(x) = \arccos(x)$ y por lo tanto

$$[\arccos]'(\cos(x)) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(x)} \Rightarrow [\arccos]'(x) = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)} \underbrace{=}_{*} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

* La última igualdad la justificamos de la siguiente manera

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} \Rightarrow \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - [\cos(\arccos)]^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

Ejemplo Hallar $\arcsin'(x)$

Solución Para esto tenemos que
Si $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ entonces $f^{-1}(x)=\arcsin(x)$ y por lo tanto

$$[\arcsin]'(\operatorname{sen}(x))=\frac{1}{\cos(x)}\Rightarrow[\arcsin]'(x)=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}\underbrace{=}_{*}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

* La última igualdad la justificamos de la siguiente manera

$$\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)=1\Rightarrow\cos(x)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}\Rightarrow\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-[\operatorname{sen}(\arcsin)]^2}$$

$$\Rightarrow\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$$

Ejemplo Hallar $\arctan'(x)$

Solución Para esto tenemos que
Si $f(x)=\tan(x)$ entonces $f^{-1}(x)=\arctan(x)$ y por lo tanto

$$[\arctan]'(\tan(x))=\frac{1}{\sec^2(x)}\Rightarrow[\arctan]'(x)=\frac{1}{\sec^2(\arctan x)}\underbrace{=}_{*}\frac{1}{1+x^2}$$

* La última igualdad la justificamos de la siguiente manera

$$\tan^2(x)+1=\sec^2(x)\Rightarrow\sec^2(\arctan(x))=1+[\tan(\arctan(x))]^2\Rightarrow\sec^2(\arctan(x))=1+x^2$$

Definición 1. *Definimos el seno hiperbólico de x como*

$$senh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Definimos el coseno hiperbólico de x como

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

Ejemplo Hallar $arcsenh'(x)$

Solución Si $f(x)=senh(x)$ entonces $f^{-1}(x)=arcsenh(x)$ y por lo tanto

$$[arcsinh]'(x)=\frac{1}{\cosh(arcsinhx)}\underbrace{=}_{*}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

* La última igualdad la justificamos de la siguiente manera

$$\cosh^2(x)-senh^2(x)=1\Rightarrow\cosh(x)=\sqrt{1+senh^2(x)}\Rightarrow\cosh(arcsinh(x))=\sqrt{1+[senh(arcsinh)]^2}$$

$$\Rightarrow\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1+x^2}$$

Ejemplo Hallar $arccosh'(x)$

Solución Si $f(x) = \cosh(x)$ entonces $f^{-1}(x) = arcosh(x)$ y por lo tanto

$$[arccosh]'(x) = \frac{1}{senh(arccoshx)} \underbrace{=}_{*} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

* La última igualdad la justificamos de la siguiente manera

$$\cosh^2(x) - senh^2(x) = 1 \Rightarrow senh(x) = \sqrt{cosh^2(x) - 1} \Rightarrow senh(arccosh(x)) = \sqrt{[cosh(arccosh(x))]^2 - 1}$$

$$\Rightarrow senh(arccosh(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$$