Regla de la cadena

Teorema 1. *Regla de la Cadena.-Supóngase que f es derivable en x_0 y que g es derivable en $f(x_0)$. Entonces la composición $g \circ f(x)$ es derivable en x_0, y*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Demostración. Vamos a definir la función

$$h(u) = \begin{cases} \frac{g(u)-g(f(x_0))}{u-f(x_0)} & si \quad x \neq f(x_0) \\ g'[f(x_0)] & si \quad u = f(x_0) \end{cases}$$

vamos a ver que h es continua en $f(x_0)$, y para esto se tiene que:

$$\lim_{u \to f(x_0)} h(u) = \lim_{u \to f(x_0)} \frac{g(u)-g(f(x_0))}{u-f(x_0)} = g'[f(x_0)] = h(f(x_0))$$

y por tanto h es continua en $f(x_0)$
Por otro lado tenemos que si $u \neq f(x_0)$ entonces

$$h(u) = \frac{g(u)-g(f(x_0))}{u-f(x_0)} \Rightarrow g(u)-g(f(x_0)) = h(u)\cdot(u-f(x_0))$$

de esta manera tenemos que

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{h(f(x))\cdot(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} h(f(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$h(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

□

Ejemplo Hallar $f'(x)$ si $f(x) = a^x$

Solución Para esto se tiene que

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$$

de esta manera podemos definir $g(x) = e^x$ y $f(x) = x \cdot \ln(a)$ por tanto

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x \cdot \ln(a)) = e^{x\cdot\ln(a)} = e^{\ln(a^x)} = a^x$$

y aplicamos la regla de la cadena

$$(a^x)' = (g \circ f(x))' = g'(f(x)) \cdot g'(x) = e^{x\cdot\ln(a)} \cdot \ln(a) = e^{\ln(a^x)} \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

Ejemplo Hallar $h'(x)$ si $h(x) = [f(x)]^{g(x)}$

Solución Para esto se tiene que

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{\ln\left([f(x)]^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$$

de esta manera podemos defirnir $f_1(x) = g(x)\cdot\ln(f(x))$ y $g_1(x) = e^x$ por lo que

$$g_1 \circ f_1(x) = g_1(f_1(x)) = g_1\left(g(x)\cdot\ln(f(x))\right) = e^{g(x)\cdot\ln(f(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = f(x)^{g(x)}$$

por lo tanto

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{\ln(f(x))^{g(x)}}\right)' = e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}\cdot\left[g'(x)\cdot\ln(f(x)) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Ejemplo Hallar $f'(x)$ si $f(x) = x^x$

Solución tenemos que

$$(x^x)' = \left(e^{\ln(x)^x}\right)' = e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\left[1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right] = x^x\cdot(\ln(x)+1)$$