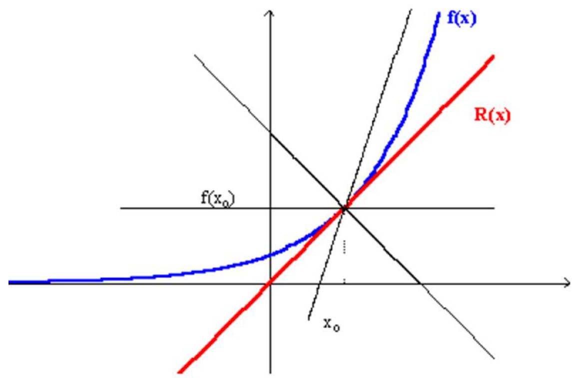
Polinomios de Aproximación (Polinomios de Taylor P_n)

Sabemos que la recta tangente a una función en un punto es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia (xo, f(xo)), es aquella recta que pasa por el mencionado punto y tiene la misma pendiente que la curva en ese punto (primera derivada en el punto), lo que hace que la recta tangente y la curva sean prácticamente indistinguibles en las cercanías del punto de tangencia. Gráficamente podemos observar que la curva se pega "suavemente.ª la recta en este entorno, de tal manera que "de todas las rectas que pasan por el punto, es esta recta la que más se parece a la curva cerca del punto".



Buscamos entonces un polinomio de grado 1

$$P_1(x) = a + b(x - x_0)$$

tal que
(a) Pase por $f(x_0)$ es decir $P_1(x_0) = f(x_0)$, en este caso

$$P_1(x) = a + b(x - x_0) \;\Rightarrow\; P_1(x_0) = a \;\Rightarrow\; a = P_1(x_0) = f(x_0) \;\Rightarrow\; a = f(x_0)$$

(b) Tenga la misma inclinación en x_0 es decir $P_1'(x_0) = f'(x_0)$
en este caso

$$P_1'(x) = b \;\Rightarrow\; b = P_1'(x) \;\Rightarrow\; b = P_1'(x_0) = f'(x_0) \;\Rightarrow\; b = f'(x_0)$$

por lo tanto

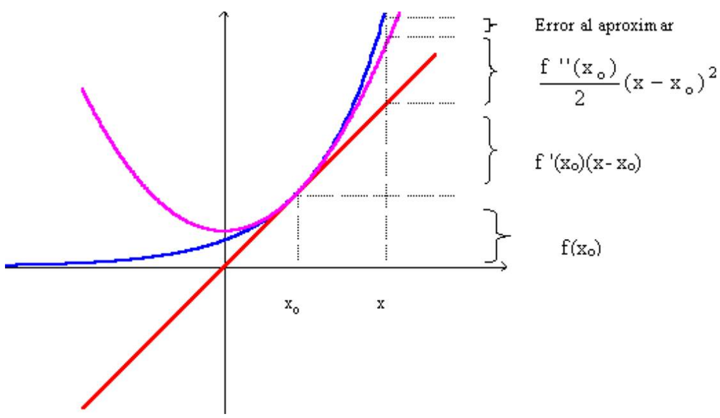
$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Veamos que sucede si en lugar de aproximarnos con una recta tratamos de hacerlo con una parábola, es decir tratemos de encontrar de todas las parábolas que pasan por (xo, f(xo)), la que mejor aproxima a la curva, es decir tratemos de encontrar "la parábola tangente". Nótese que la parábola tangente a una curva no es única.
Dada la ecuación cuadratica de la parábola $P_2(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2$ debemos pedirle que pase por el punto, que tenga la misma inclinación (primera derivada) y la misma concavidad que la parábola (segunda derivada), es decir debemos pedirle:
a) $P_2(x_0) = f(x_0)$

b) $P_2'(x_0) = f'(x_0)$
c) $P_2''(x_0) = f''(x_0)$
Como $P_2(x_0) = a$, $P_2'(x) = b$ y $P_2''(x) = 2c$, concluimos que
$a = f(x_0)$, $b = f'(x_0)$ y $c = \left(\frac{1}{2}\right) f''(x_0)$ quedando la ecuación de la parábola que mejor aproxima a la curva en las cercanías de (xo,f(xo)), como:

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

En la figura de abajo, observamos gráficamente los tres sumandos de la expresión de la parábola tangente. Los dos primeros nos dan la altura sobre la recta tangente y añadiéndole el tercero nos da la altura sobre la parábola tangente



Definición 1. *Suponga que las $n+1$ derivadas de una función f existen alrededor de un punto x_0 de su dominio, llamamos el polinomio de Taylor de grado n alrededor de x_0 a:*

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

es decir

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)(x - x_0)^k}{k!}$$

Ejemplo Ejemplos hallar los polinomios de Taylor para
a) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, alrededor del 0

Solución para esto se tiene que
$f^0(x) = \operatorname{sen}(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f^2(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $f^3(x) = -\cos(x)$ y $f^4(x) = \operatorname{sen}(x)$ por tanto $f^0(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$, $f'(0) = \cos(0) = 1$, $f_2(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$, $f^3(0) = -\cos(0) = -1$ y $f^4(0) = \operatorname{sen}(0) = 0 \therefore$

$$T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \frac{f^4(0)}{6!}(x)^4 = x - \frac{x^3}{6}$$

Ejemplo Ahora para $f(x) = \cos(x)$, alrededor del 0

Solución Para esto se tiene que
$f^0(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $f_2(x) = -\cos(x)$, $f^3(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $f^4(x) = \cos(x)$ por tanto
$f^0(0) = \cos(0) = 1$, $f'(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$, $f_2(0) = -\cos(0) = -1$, $f^3(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$ y $f^4(0) = \cos(0) = 1 \therefore$

$$T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \frac{f^4(0)}{6!}(x)^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

Ejemplo Ahora para $f(x) = e^x$, alrededor del 0

Solución Para esto se tiene que
$f^0(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f_2(x) = e^x$, $f^3(x) = e^x$ y $f^4(x) = e^x$ por tanto
$f^0(0) = e^0 = 1$, $f'(0) = e^0 = 1$, $f_2(0) = e^0 = 1$, $f^3(0) = e^0 = 1$ y $f^4(0) = e^0 = 1 \therefore$

$$T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \frac{f^4(0)}{6!}(x)^4 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Teorema de Taylor

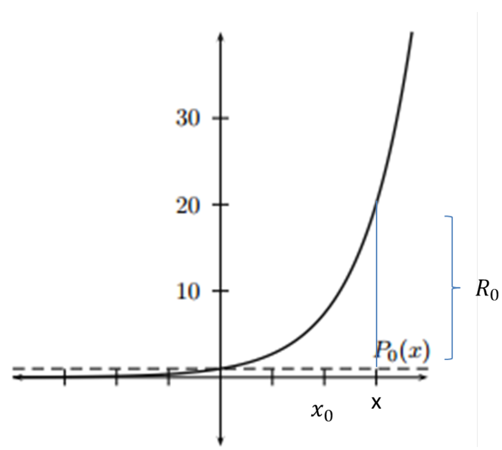
Definición 2. *Supongamos que las $n+1$ derivadas de una función f existen en un intervalo abierto I que contenga a x_0. Entonces para todo x en I, definimos el residuo n de taylor como.*

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

esto es

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

Podemos obtener una idea preliminar examinado $P_0(x)$ el polinomio de taylor cero para f usando el teorema del valor medio.



Suponga que f es una función diferenciable en un intervalo I que contenga a x_0. Sea $x \in I$, $x_0 \neq x$. Por el teorema del valor medio aplicado a $[x, x_0]$ $\exists$ $c \in (x, x_0)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

es decir

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$$
$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$$
$$f(x) - P_0(x) = f'(c)(x - x_0)$$
$$R_0(x) = f'(c)(x - x_0)$$

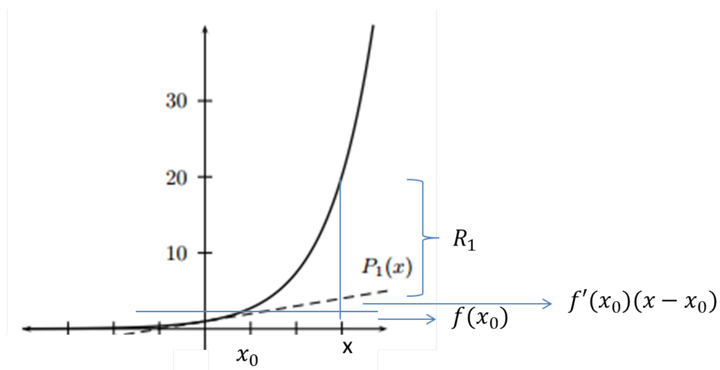
Por lo tanto, el teorema del valor medio podría reformularse sobre el residuo $R_0(x)$.

Lema 1. *Supongamos que f es diferenciable en un intervalo I que contenga a x, x_0 con $x \neq x_0$ en I, $\exists$ c entre x y x_0 tal que*

$$R_0(x) = f'(c)(x - x_0)$$

Para el residuo R_1 se tiene que dado el polinomio de taylor de grado 1

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + R_{1,t}$$



Para todo número $t \in [x_0, x]$ tenemos

$$f(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + R_{1,t}(x)$$

Vamos a designar el número $R_{1,t}(x)$ por $S(t)$; la función S está definida sobre $[x_0, x]$, y tenemos

$$f(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + S(t), \quad \forall\ t \in [x_0, x]$$

es decir

$$R_{1,t}(x) = S(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t)$$

Vamos a derivar la siguiente expresión respecto a t

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + R_{1,t}$$

y se tiene que

$$0 = f'(t) + f''(t)(x - t) - f'(t) + S'(t)$$

por lo que

$$S'(t) = -\frac{f''(t)(x-t)}{1!}$$

Aplicamos ahora el teorema del valor medio generalizado a las funciónes S, $g(t) = (x - t)^2$ sobre $[x_0, x]$, por lo que existe un valor $t \in (x_0, x)$ tal que

$$\frac{S(x) - S(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{S'(t)}{g'(t)} = \frac{-\frac{f''(t)(x-t)}{1!}}{-2(x-t)} = \frac{\frac{f''(t)(x-t)}{1!}}{2(x-t)} = \frac{f''(t)}{2}$$

Dado que

$$S(x) = R_{1,x}(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(t)}{1!}(x - x) = 0$$
$$S(x_0) = R_{1,x_0}(x)$$

se tiene

$$\frac{S(x) - S(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{-R_{1,x_0}(x)}{-(x - x_0)^2} = \frac{R_{1,x_0}(x)}{(x - x_0)^2}$$

por lo tanto

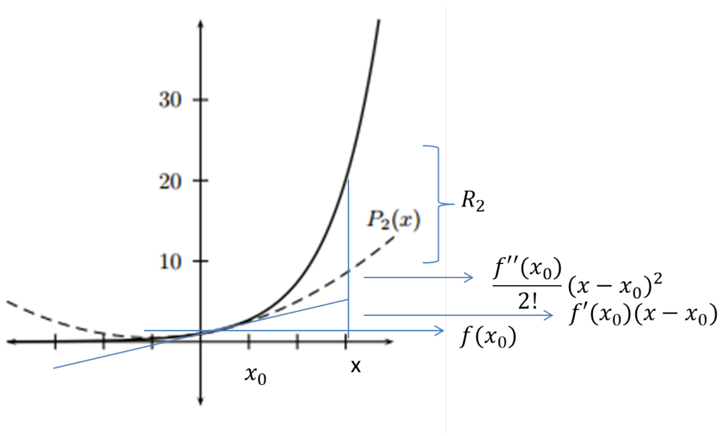
$$\frac{R_{1,x_0}(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(t)}{2!}$$

y por lo tanto

$$R_{1,x_0}(x) = \frac{f''(t)}{2!}(x - x_0)^2$$

Para el residuo R_2 se tiene que dado el polinomio de taylor de grado 2

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + R_{2,t}$$



Para todo número $t \in [x_0, x]$ tenemos

$$f(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + R_{2,t}(x)$$

Vamos a designar el número $R_{2,t}(x)$ por $S(t)$; la función S está definida sobre $[x_0, x]$, y tenemos

$$f(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t)^2 + S(t), \quad \forall\, t \in [x_0, x]$$

es decir

$$R_{2,t}(x) = S(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2$$

Vamos a derivar la siguiente expresión respecto a t

$$f(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + S(t)$$

y se tiene que

$$0 = f'(t) + f''(t)(x-t) - f'(t) + \frac{1}{2}f'''(t)(x-t)^2 - f''(t)(x-t) + S'(t)$$

por lo que

$$S'(t) = -\frac{f'''(t)(x-t)}{2}$$

Aplicamos ahora el teorema del valor medio generalizado a las funciónes S, $g(t) = (x-t)^3$ sobre $[x_0, x]$, por lo que existe un valor $t \in (x_0, x)$ tal que

$$\frac{S(x) - S(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{S'(t)}{g'(t)} = \frac{-\frac{f'''(t)(x-t)^2}{2}}{-3(x-t)^2} = \frac{f'''(t)}{6}$$

Dado que

$$S(x) = R_{2,x}(x) = f(x) - f(x) - \frac{f'(t)}{1!}(x-x) - \frac{f''(t)}{2!}(x-x)^2 = 0$$

$$S(x_0) = R_{2,x_0}(x)$$

se tiene

$$\frac{S(x) - S(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{-R_{2,x_0}(x)}{-(x-x_0)^3} = \frac{R_{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^3}$$

por lo tanto

$$\frac{R_{2,x_0}(x)}{(x-x_0)^3} = \frac{f'''(t)}{3!}$$

y por lo tanto

$$R_{2,x_0}(x) = \frac{f'''(t)}{3!}(x-x_0)^3$$

Ahora estamos en el punto en que podemos afirmar y demostrar el teorema de Taylor.

Teorema 1. ***Teorema de Taylor*** *Supongase que f es n veces derivable en un intervalo I que contiene a x_0, donde $x \neq x_0$ y $f^{n+1}(x)$ existe para todo x de I, entre x, x_0 si T_n y R_n estan bien definidos entonces existe $c \in I$ tal que*

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

esta es la llamada forma de Lagrage del residuo

Demostración. Vamos a definir una función

$$G(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(t)}{k!}(x-t)^k + R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}$$

tenemos que G es derivable para todo t en I y continua en el intervalo cerrado I y la derivada de G es:

$$G'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^k(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} + \frac{f^{k+1}(t)}{k!}(x-t)^k\right] + \frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(x-x_0)^{n+1}}R_n(x) =$$

$$f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f^k(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{k+1}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}R_n(x) =$$

$$f'(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{k+1}(t)}{(k)!}(x-t)^{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^{k+1}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}R_n(x) =$$

$$f'(t) - \frac{f'(t)}{0!}(x-t)^0 + \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}R_n(x) =$$

$$\frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}R_n(x)$$

$\therefore$

$$G'(t) = \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}R_n(x)$$

por otro lado

$$G(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^k(a)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}} = T_n(x) + R_n(x) = f(x)$$

$$G(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n}\frac{f^k(t)}{k!}(x-x)^k + R_n(x)\frac{(x-x)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}} = f(x)$$

por lo tanto $G(x_0) = G(x)$ y según el teorema de Rolle existe $c \in (x, x_0)$ tal que $G'(c) = 0$ por lo tanto

$$0 = G'(c) = \frac{f^{n+1}(c)}{n!}(x-c)^n - \frac{(n+1)(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}R_n(x) \;\Rightarrow\; R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

□

Ejemplo Use el teorema de Taylor para probar que $\forall\ x > 0$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}e^x$$

Demostración. Sea $x > 0$ el polinomio de taylor $T_2(x)$ para $f(x) = e^x$ alrededor del cero es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + R_2(x) \quad \textit{donde} \quad R_2(x) = \frac{e^c x^3}{3!} \quad \textit{con} \quad c \in (0, x)$$

$$\therefore \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^c x^3}{3!}$$

como $0 < c < x$ entonces $1 < e^c < e^x$ por tanto

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} < 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{e^c x^3}{3!} < 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{e^x x^3}{3!} \Rightarrow 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!} < e^x < 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{e^x x^3}{3!}$$

$\square$