Teorema de la función Implicita

En general, una representación implícita de una curva del plano xy esta dada por una sola ecuación en x,y de la forma $F(x,y)=0$.

Ejemplo La ecuación

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$$

se representa implicitamente por

$$F(x,y)=\frac{x}{3}+\frac{y}{5}-1$$

Teorema 1. *Considere la función $z=F(x,y)$. Sea $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ un punto tal que $F(x_0,y_0)=0$. Suponga que la función F tiene derivadas continuas en alguna bola con centro (x_0,y_0) y que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Entonces $F(x,y)=0$ se puede resolver para y en términos de x y definir así una función $y=f(x)$ con dominio en una vecindad de $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, y rango (y_0-k,y_0+k) tal que $y_0=f(x_0)$, lo cual tiene derivadas continuas en $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ que puede calcularse como $y'=f'(x)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$, $x\in\mathcal{V}$.*

Demostración. **Idea de la demostración**
(1) Tenemos que

$$F(x_0,y_0)=0$$

por lo que fijando x_0 y considerando $F(x_0,y)$ como función de $\mathbf{y}$, al ser $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ se tiene que F es creciente y por lo tanto

$$F(x_0,y_0-k)<0 \quad y \quad F(x_0,y_0+k)>0$$

(2) Considero las funciones

$$F(x,y_0-k) \quad y \quad F(x,y_0+k)$$

la función $F(x,y_0-k)$ cumple $F(x_0,y_0-k)<0$ por lo que existe $\delta_1>0$ tal que

$$x\in(x_0-\delta_1,x_0+\delta_1) \Rightarrow F(x,y_0-k)<0$$

la función $F(x,y_0+k)$ cumple $F(x_0,y_0+k)>0$ por lo que existe $\delta_2>0$ tal que

$$x\in(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2) \Rightarrow F(x,y_0+k)>0$$

(3) Si tomamos $\delta=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2\}$ se tiene que

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow F(x,y_0-k)<0 \quad y \quad F(x,y_0+k)>0$$

(4) Fijando un $\mathbf{x}$ en el intervalo $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ y considerando la función $F(x,y)$ en $[y_0-k,y_0+k]$ se tiene que

$$F(x,y_0-k)<0 \quad y \quad F(x,y_0+k)>0$$

por lo tanto según el teorema del valor intermedio se tiene que existe **y**$\in (y_0 - k, y_0 + k)$ tal que

$$F(x,y) = 0$$

por lo tanto

$$F(x,y) = 0 \quad si \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad y \quad y \in [y_0 - k, y_0 + k]$$

es decir $y = f(x), \quad \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ □

Ejemplo Encuentre (x_0, y_0) tal que la ecuación

$$x + y + e^{xy} = 0$$

se pueda escribir como una función $y = f(x)$ en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Solución En este caso tenemos que

$$F(0,-1) = (0) + (-1) + (e^0) = 0$$

por otro lado

$$\frac{d\ F}{dy} = 1 + xe^{xy} \ \Rightarrow\ \frac{d\ F}{dy}(0,-1) = 1 \neq 0$$

por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema de la función implicita, consecuentemente existe $y = f(x)$ en un intervalo $(0 - \delta, 0 + \delta)$ con rango $(-1 - \epsilon, -1 + \epsilon)$

Ejemplo Encuentre (x_0, y_0) tal que la ecuación

$$x^2 - xy + y^3 = 8$$

se pueda escribir como una función $y = f(x)$ en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Solución En este caso tenemos que

$$F(0,2) = (0)^2 - (0)(2) + (2)^3 - 8 = 0$$

por otro lado

$$\frac{d\ F}{dy} = -1 + 3y^2 \ \Rightarrow\ \frac{d\ F}{dy}(0,2) = -1 + (2)^2 \neq 0$$

por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema de la función implicita, consecuentemente existe $y = f(x)$ en un intervalo $(0 - \delta, 0 + \delta)$ con rango $(2 - \epsilon, 2 + \epsilon)$

Ejemplo Encuentre (x_0, y_0) tal que la ecuación

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

se pueda escribir como una función $y = f(x)$ en un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Solución En este caso tenemos que

$$F(0, \sqrt[5]{12}) = (\sqrt[5]{12})^5 + 3(0)^2(\sqrt[5]{12})^2 + 5(0)^4 - 12 = 0$$

por otro lado

$$\frac{d\ F}{dy} = 5y^4 + 6yx^2 \ \Rightarrow\ \frac{d\ F}{dy}(0, \sqrt[5]{12}) = 5(\sqrt[5]{12})^4 \neq 0$$

por lo tanto se cumplen las hipótesis del teorema de la función implicita, consecuentemente existe $y = f(x)$ en un intervalo $(0 - \delta, 0 + \delta)$ con rango $(\sqrt[5]{12} - \epsilon, \sqrt[5]{12} + \epsilon)$