Funciones Paramétricas

Ejemplo Dadas las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= 2t - 2 \\ y &= 4 - t \end{aligned}$$

el parámetro t puede eliminarse por igualación

$$\begin{aligned} x &= 2t - 2 \\ y &= 4 - t \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} t &= \tfrac{x+2}{2} \\ t &= 4 - y \end{aligned} \;\Rightarrow\; \frac{x+2}{2} = 4 - y \;\Rightarrow\; x + 2y - 6 = 0$$

que es la ecuación de una recta.
Una representación paramétrica frecuentemente puede constituir la regla de correspondencia de una función, como en el caso anterior.

Derivada de una Funcion Paramétrica

Dada una función $y = f(x)$, cuya representación paramétrica es de la forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

vamos a calcular $\dfrac{dy}{dx}$, tenemos que

$$\Delta_x = f(t + \Delta_t) - f(t)$$

$$\Delta_y = g(t + \Delta_t) - g(t)$$

por lo que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{g(t + \Delta_t) - g(t)}{f(t + \Delta_t - f(t)} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

la expresión $\dfrac{dt}{dx}$ se puede calcular despejando t de $x = f(t)$, lo cual no siempre es facil.

Ejemplo Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ para $x = a\cos\ t, \quad y = b\,\mathrm{sen}\ t$

Solución En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{(a\cos\ t)'}{(b\,\mathrm{sen}\ t)'} = \frac{-a\,\mathrm{sen}\ t}{b\cos\ t}$$

Ejemplo Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ para $x = \dfrac{t+1}{t}, \quad y = \dfrac{t-1}{t}$

Solucióin En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{\left(\frac{t+1}{t}\right)'}{\left(\frac{t-1}{t}\right)'} = -1$$

Ejemplo Calcular $\dfrac{dy}{dx}$ para $x = e^t\,\mathrm{sen}\ t, \quad y = e^t\cos\ t$

Solución En este caso

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{(e^t \operatorname{sen}\ t)'}{(e^t \cos\ t)'} = \frac{\operatorname{sen}\ t + \cos\ t}{-\operatorname{sen}\ t + \cos\ t}$$

Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy

Teorema 1. *Supongamos que tenemos dos funciones f, g las cuales son continuas en un intervalo* $[a, b]$*, y diferenciables en* (a, b)*, donde* $a < b$*. Entonces existe* $c \in (a, b) \ni$

$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

si $f'(c) \neq 0$ *y* $f(b) \neq f(a)$ *se puede escribir*

$$\frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$$

Demostración. Definimos una función

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$$

esta función $h(x)$ es continua en $[a, b]$, y diferenciable en (a, b) porque f y g tienen esas propiedades. Además

$$h(a) = f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)] = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$
$$b(b) = f(b)[g(b) - g(a)] - g(b)[f(b) - f(a)] = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$

por lo tanto $h(a) = h(b)$ por lo que $h(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle, por lo que

$$\exists\ c \in (a, b) \ni h'(c) = 0 \Rightarrow g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

□

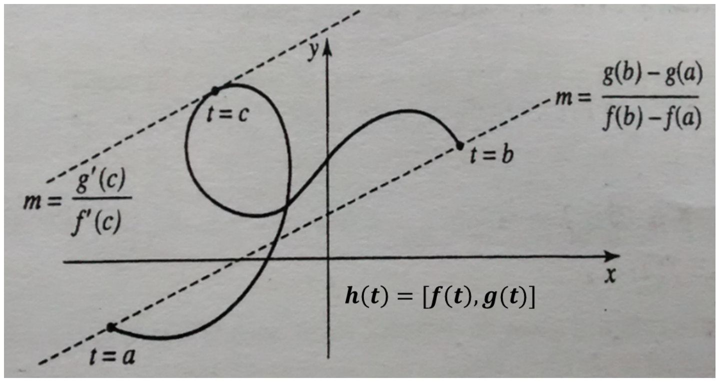
Una interpretación geométrica del teorema del valor medio generalizado parte del hecho de que dada una función $y = f(x)$, cuya representación paramétrica es de la forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b$$

si $t \in (a, b)$ con $f'(t) \neq 0$ la pendiente de la función en el punto $(f(t), g(t))$ es $m = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$.
Supongamos ahora que $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) \neq 0$. Entonces la conclusión del teorema de Cauchy se puede escribir

$$\exists\ c \in (a, b) \ni \frac{g'(c)}{f'(c)} = \frac{g(b) - g(a)}{f(b) - f(a)}$$

Este teorema garantiza que si $f'(x) \neq 0$ en (a, b) y $f(b) \neq f(a)$ entonces existe $c \in (a, b)$ para el cual la pendiente de la línea tangente a la curva en $(f(c), g(c))$ es igual a la pendiente de la recta secante a través de los puntos finales de la curva $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$



Regla de L´hopital

Teorema 2. *Supongamos que tenemos dos funciones f,g tales que: son derivables en una vecindad alrededor de un punto x_0 de su dominio y se cumple*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

supogamos ademas que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \exists$$

entonces

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \exists \quad y \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración. Caso 1 $x \to x_0^+$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.
Sea $\epsilon > 0$ entonces $\exists\ \delta > 0$ tal que si $x \in (x_0, x_0+\delta)$ entonces

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \epsilon$$

sea $y \in (x_0, x)$ y aplicamos el TVM al intervalo $[x_0, x]$ entonces exite $c \in (x_0, x)$ talque

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ \forall\ y \in [x_0, x]$$

si hacemos $y \to x_0$ entonces

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \epsilon \ \Rightarrow\ \left|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - L\right| < \epsilon \ \Rightarrow\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon$$

esto ocurre $\forall\ \ x \in (x_0, x_0+\delta)$ por lo tanto

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \exists \quad y \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Observación: La regla de l´hopital presenta los siguientes casos

$$(a)\quad \lim_{x\to\alpha} f(x)=0 \quad y \quad \lim_{x\to\alpha} g(x)=0 \quad ó \quad \lim_{x\to\alpha} f(x)=+\infty \quad y \quad \lim_{x\to\alpha} g(x)=+\infty \quad ó \quad -\infty \quad (3\ casos)$$

$$(b)\quad \alpha = x_0^+,\ x_0^-,\ x_0,\ +\infty,\ -\infty \quad (5\ casos)$$

$$(c)\quad \lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (finito,\ +\infty,\ ó\ -\infty) \quad (3\ casos)$$

de esta manera, la regla de L´hopital cubrirá 45 diferentes casos, cada uno de los cuales también pueden requerir su propia prueba.

Demostración. Caso 2 $x\to x_0^+,\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=0 \quad y \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=0,\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty.$
Sea $M>0$ entonces $\exists\ \delta>0$ tal que

$$x_0<x<x_0+\delta \ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{g'(x)}>M$$

Sea $y\in(x_0,x)$ aplicando el teorema del valor medio generalizado al intervalo (y,x) se tiene $\exists\ c\in(y,x)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

por lo tanto

$$x_0<x<x_0+\delta \ \Rightarrow\ \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}>M$$

y haciendo $y\to x_0$ se tiene

$$x_0<x<x_0+\delta \ \Rightarrow\ \frac{f(x)}{g(x)}>M$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

□

Ejemplo Usando la regla de L´hopital calcular $\lim_{x\to x_0^+}\frac{\text{sen } x}{x^2}$

Solución En este caso

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen } x}{x^2}\underbrace{=}_{\text{sen } x\to 0\ y\ x^2\to 0}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2x}=+\infty$$

Ejemplo Usando la regla de L´hopital calcular $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$

Solución En este caso

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\underbrace{=}_{\ln x\to 0\ y\ x-1\to 0}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

Ejemplo Usando la regla de L´hopital calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\text{sen }\ x}{\cos^2 x}$

Solución En este caso

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\text{sen }\ x}{\cos^2 x} \underbrace{=}_{1-\text{sen }\ x\to 0\ y\ \cos^2 x\to 0} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos\ x}{2\cos\ x(-\text{sen }\ x)} = \frac{1}{2}$$