Nombre:			Día	Mes	Año	Folio
Tema:			12	08	2016	

PROPOSICIÓN: FALSO Y VERDADERO.

-> NEGACIÓN $\neg$

-> CONJUNCIÓN $\wedge$ ($\cap$)

-> DISYUNCIÓN $\vee$ ($\cup$)

-> IMPLICACIÓN $\Rightarrow$

-> DOBLE IMPLICACIÓN $\Leftrightarrow$

↓

TAREA

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Y = AMBOS VERDADEROS.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \rightarrow \neg Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V

DEFINICIONES:

* TEOREMA: ES UNA PROPOSICIÓN MATEMÁTICA QUE ES VERDADERA, Y QUE SE PUEDE SER (Y HA SIDO) VERIFICADA COMO VERDADERA.
  EJEMPLO: EXISTE UNA INFINIDAD DE NÚMEROS PRIMOS.
* LEMA: ES UNA PROPOSICIÓN DEMOSTRADA, UTILIZADA PARA ESTABLECER UN TEOREMA.
  EJEMPLO: TODO CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO NO VACÍO EN EL QUE TODA CADENA TIENE UNA COTA SUPERIOR, CONTIENE UN ELEMENTO MAXIMAL.
* COLORADIO: ES UN TÉRMINO QUE SE UTILIZA EN MATEMÁTICAS Y EN LÓGICA PARA DESIGNAR LA EVIDENCIA DE UN TEOREMA.
  EJEMPLO: UN TRIÁNGULO NO PUEDE TENER MÁS DE UN ÁNGULO RECTO, NI MÁS DE UN ÁNGULO OBTUSO.

SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

① TEXTOS

> LÓGICA, CONJUNTOS, RELACIONES Y FUNCIONES.

ALVARO PÉREZ RADOSO.

$\mathcal{L}$ Directa

$\mathcal{L}$ Contrarecíproca

PROPOSICIÓN: AFIRMACIONES QUE TIENE UN VALOR DE VERDAD.

DEF. LLAMAMOS ABIERTO A UN ENUNCIADO QUE TIENE VARIABLES. QUE TOMAN DIVERSOS VALORES DE VERDAD, ESTAS VARIABLES ESTAS VARIABLES SE ENCUENTRAN EN UN CONJUNTO LLAMADO UNIVERSO DE DISCURSO.

$P(x)$ ES UN ENUNCIADO ABIERTO, NO TIENE UN VALOR DE VERDAD FIJO.

CUANTIFICADORES: SON PREFIJOS QUE SE COLOCAN ANTE DE UN ENUNCIADO ABIERTO PARA CONVERTIRLO EN PROPOSICIÓN

$\forall$ PARA TODO

$\exists$ EXISTE.

SI $P(x)$ ES UN ENUNCIADO ABIERTO

$\forall_x P(x)$

PARA TODO x $P(x)$

$\exists_x P(x)$

EXISTE ALGÚN x TAL QUE $P(x)$

$U = \mathbb{N}$

$\forall_x P(x)$ F

$P(x) := x$ ES PRIMO.

$U = \mathbb{R}$

$P(x) = x^2 = -1$

$\forall_x P(x)$

F

CUANTIFICADOR UNIVERSAL

$\forall_x P(x)$, ES VERDADERA SI PARA CUALQUIER x EN EL UNIVERSO SE CUMPLE $P(x)$ Y ES FALSA SI HAY UN x EN EL UNIVERSO t.q $P(x)$ ES FALSA.

CUANT. EXISTENCIAL.

$\exists_x P(x)$ ES VERDADERA SI HAY UN x EN EL UNIVERSO tq $P(x)$ ES VERDADERA, Y FALSA SI PARA CUALQUIER x EN EL UNIVERSO $P(x)$ ES FALSA.

Nombre:
Tema:

Día	Mes	Año	Folio

NEGACIONES.

$\neg(\forall_x\, p(x)) = \exists_x(\neg p(x))$

$\neg(\exists\, p(x)) = \forall_x(\neg p(x))$

→ EXISTE UN NÚMERO REAL QUE ES MULTIPLO DE 3.

→ PARA TODO NÚMERO REAL NO ES MULTIPLO DE 3.

$p \Rightarrow q$

$\neg q \Rightarrow \neg p$

REDUCCIÓN AL ABSURDO.

SEAN p, q, w PROPOSICIONES.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

w	$\neg w$	$w \wedge \neg w$
V	F	F
F	V	F

SIEMPRE ES FALSO
↓
ABSURDO.

$p \wedge \neg q$	$w \wedge \neg w$	$p \wedge \neg q \Rightarrow w \wedge \neg w$
F	F	V
V	F	F
F	F	V
F	F	V

EQUIVALENTE.

OBS. $p \Rightarrow q$ ES LÓGICAMENTE EQUIVALENTE A $(p \wedge \neg q) = (w \wedge \neg w)$

Nombre: | | | Día | Mes | Año | Folio
Tema:

SEAN A, B CONJUNTOS

DEF $A \subseteq B$
$\forall x \, (x \in A \Rightarrow x \in B)$

DEF A ES CONJUNTO

$A^c = \{ x \mid x \notin A \}$

DEF. $B/A = B - A$
$B/A = \{ x \mid x \in B \wedge \neg (x \in A) \}$

DEF. SEA $k \in \mathbb{Z}$, DIREMOS QUE k ES PAR SI EXISTE UN $n \in \mathbb{Z}$ tq $k = 2n$.

$\{$ EJEMPLO $0 \}$

DEF SEA $k \in \mathbb{N}$, DIREMOS QUE k ES IMPAR, SI EXISTE $n \in \mathbb{N}$ tq $k = 2n+1$

EJEMPLO: DEMUESTRE $\underbrace{A \subseteq B}_{p}$, ENTONCES $\underbrace{A/B = \emptyset}_{q}$

SUPONGAMOS $A \subseteq B$ Y LA NEGACIÓN DE $A/B = \emptyset$

$\left(\underbrace{A \subseteq B}_{p} \ \text{y} \ \underbrace{A/B \neq \emptyset}_{\neg q} \right)$

$\Rightarrow$ POR LA DEFINICIONES ESTAMOS SUPONIENDO

$\underbrace{\forall_x (x \in A \Rightarrow x \in B)}_{p} \ \text{y} \ \underbrace{\exists_y \in (A/B)}_{\neg q}$

$\Rightarrow \forall_x (x \in A \Rightarrow x \in B) \ \text{y} \ \exists_y (y \in A \wedge y \notin B)$

ENTONCES $(\exists y \in A \, (y \in A \wedge y \notin B)) \wedge (y \in A \wedge y \in B)$

$(y \in A \wedge y \in B \wedge y \notin B)$

POR LO TANTO $\exists \ y \in B \wedge y \notin B$
POR REDUCCIÓN AL ABSURDO $A/B = \emptyset$

$A \subseteq B \Rightarrow A/B = \emptyset$

$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists y \mid y \in A \wedge y \notin$
$(\forall_x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists y \mid y \in A \wedge \neg (y \in B)$
$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists y \neg (y \in A \Rightarrow y \in B)$
$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \neg (\forall y (y \in A \Rightarrow y \in B)$

Nombre:
Tema:

Día | Mes | Año | Folio

Si $a \in \mathbb{R}$ entonces $|a| = |-a|$

Dem. Sea $a \in \mathbb{R}$ entonces

Caso 1: $a > 0$

como $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$

$\Rightarrow |-a| = -(-a) = a$

como $|a| = a$

entonces $|a| = a = |-a|$

$\therefore |a| = |-a|$

Caso 2: $a \leq 0$ entonces

$|a| = -a$

como $-a \geq 0$ pues $a \leq 0$

$= |-a| = -a$

Por tanto

$|a| = -a = |-a|$

$\Rightarrow |a| = |-a|$

Por caso uno y dos

$|a| = |-a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ▲

V ó F

Si A, B conjuntos, entonces $A/B = B/A$.

Verdadero o falso

$|a+b| = |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

Falso

Sea $a = 3$

$b = 2$

$|a+b| = |3 + (-2)| = |3 - 2| = |1| = 1$

Por otro lado

$|a| = 3$

$|b| = 2$

$\Rightarrow |a| + |b| = 3 + 2 = 5$

como $5 \neq 1$

$\therefore |a+b| \neq |a| + |b|$

Nombre:

Tema:

Día	Mes	Año	Folio

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN:

- DIRECTO $(p \Rightarrow q) \wedge (q_1 \Rightarrow q_2) \wedge (q_3 \Rightarrow q_4) \cdots = \wedge (q_{n-1} \Rightarrow q_n = Q) \Rightarrow (p \Rightarrow Q)$
- CONTRAPOSITIVA $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$
- REDUCCIÓN AL ABSURDO. $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \wedge P \Rightarrow W \wedge \neg W$
- CASOS $P \Rightarrow Q \equiv (P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q) \wedge \cdots$
- CONTRAEJEMPLO $P \Rightarrow Q \equiv \underbrace{(P_1 \Rightarrow Q)}_{F} \wedge \underbrace{(P_2 \Rightarrow Q)}_{V}$

$$|a+b| = |a| + |b| \quad \text{NO SE CUMPLE EN GENERAL}$$

$|a| = -2 \qquad |b| = 5 \qquad |a+b| = |-2+(5)| = 3$

$|a| = 2 \qquad |b| = 5 \qquad |a|+|b| = |2| + |5| = 7$

REDUCCIÓN AL ABSURDO:

PRUEBE $\sqrt{2}$ ES UN NÚMERO IRRACIONAL

SUPONGO QUE $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $(p,q)=1$ (IRREDUCIBLE)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = (2m)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4m^2$$

ELEVO AL CUADRADO

$$\Rightarrow \cancel{2}q^2 = \cancel{2} \cdot 2m^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q = 2l$$

Nombre:
Tema:

Día	Mes	Año	Folio
17	08	2015	

RAÍZ DE UN CUADRADO ES VALOR ABSOLUTO.

NÚMERO REALES.

- CAMPOS $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R})$

DEF. UN CAMPO ES UN CONJUNTO F QUE JUNTO CON DOS OPERACIONES BINARIAS $(+, *)$ LLAMADAS SUMA Y MULTIPLICACIÓN SE COMPORTA DE LA SIGUIENTE FORMA:

SUMA

A_0 $\forall_{x, y} \in F$ SE TIENE $x+y \in F$, ADEMAS $x+y!$ (ÚNICO)

A_1 $\forall\, x, y \in F$ $x+y = y+x$ (CONMUTATIVIDAD)

A_2 $\forall\, x, y, z \in F$ $(x+y)+z = x+(y+z)$ (ASOCIATIVIDAD)

A_3 $\exists!\, x \in F$ t.q. $\forall\, y \in F$, $y+x = y$ (NEUTRO ADITIVO)

A_4 $\exists!\, x \in F$ t.q. $\forall\, y \in F$ $y+x=0$ Y SE DENOTA $x = -y$

MULTIPLI

M_0 $\forall\, x, y \in F$, $x \cdot y \in F$, ADEMÁS $x \cdot y!$

M_1 $\forall\, x, y \in F$, $x \cdot y = y \cdot x$ (CONMUTATIVIDAD)

M_2 $\forall\, x, y, z \in F$, $(x \cdot y)z = x(y \cdot z)$ (ASOCIATIVIDAD)

M_3 $\exists!\, x \in F$ t.q. $\forall\, y \in F$ $y \cdot x = y$ (NEUTRO MULTIPLICATIVO)

M_4 $\exists!\, x \in F$ t.q. $\forall\, y \in F$ $y \cdot x = 1$

Nombre:

Tema:

Día	Mes	Año	Folio

PRUEBE:

EN ALGÚN CAMPO F, SE SATISFACE

$x+y=x+z \Rightarrow y=z$

$y \underset{A_3}{=} y+0 \underset{A_4}{=} y+x+(-x) \underset{A_2}{=} (y+x)+(-x)$

$\underset{HIO}{=} (x+z)+(-x)$

$\underset{A_1}{=} (z+x)+(-x)$

$\underset{A_1}{=} z+(x+(-x)) = z+0 = z$

PRUEBE:

EN ALGÚN CAMPO F

$x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y=z \quad (x \neq 0)$

$y \underset{M_3}{=} y \cdot 1 \underset{M_4}{=} y \cdot (x \cdot x^{-1}) \underset{M_2}{=} (y \cdot x)(x^{-1}) \underset{HIO}{=} (x \cdot z)(x^{-1})$

$= (z \cdot x)(x^{-1})$

$\underset{M_2}{=} z\,(x \cdot x^{-1})$

$\underset{M_4}{=} z \cdot 1 = z$

TAREA MORAL (MIÉRCOLES)

a) SI $x \neq 0$ ENTONCES $x^{-1} \neq 0$

b) SI $x \neq 0$ ENTONCES $(x^{-1})^{-1} = x$

c) SI $x, y \neq 0$ ENTONCES $x \cdot y \neq 0$

d) SI $x, y \neq 0$ ENTONCES $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

e) $\forall x \in F$, $(-1)x = -x$

f) $\forall x, y \in F$, $(-x)y = -(xy) = x(-y)$

g) $(-1)(-1) = 1$

h) $\forall x, y \in F$, $(-x)(-y) = xy$

A_3 SUPONGO QUE $\exists\, 0'$ t.q. $x+0'=x$

$0 = 0+0' = 0'+0 = 0'$

M_3 SUPONGO QUE $\exists\, 1'$ t.q. $x+1'=x$

$1 = 1+1' = 1'+1 = 1'$

A_4 SUPONGO QUE $\exists -x'$ t.q.

$x+(-x')=0$ Y COMO $x+(-x)=0$

ENT. $x+(-x') = x+(-x)$

$\therefore -x' = -x$

M_4 SEAN b, c t.q. $b \cdot a = 1$ Y $c \cdot a = 1$

$b = b \cdot 1 = b(ab) = b \cdot (ac) = (b \cdot a)c = 1 \cdot c = c$

Nombre: | Día | Mes | Año | Folio
Tema:

$(F, +0, \cdot, 1)$ CAMPO

$A_0)$ $x, y \in F \quad x+y \in F$
$A_1)$ $\forall x, y \in F \quad x+y = y+x$
$A_2)$ $x, y, z \in F \quad (x+y)+z = x+(y+z)$
$A_3)$ $\exists 0 \in F$ t.q. $\forall x \in F \quad x+0=x$
$A_4)$ $\forall x \in F \quad \exists y \in F$ t.q. $x+y=0$

$P_0)$ $x, y \in F \quad x(y) \in F$
$P_1)$ $\forall x, y \in F \quad x(y) = y(x)$
$P_2)$ $\forall x, y, z, \in F \quad x(y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
$P_3)$ $\exists 1 \in F \mid x \forall x \in F \quad x(1) = x$ ~~EXISTENCIA NEUTRO~~
$P_4)$ $\forall x \in F \; \exists y \in F \mid xy = 1$ ~~EXISTENCIA INVERSO~~

AXIOMA DE DISTRIBUCIÓN
D) $\forall x, y, z, \in F$
$x \cdot y + z = x \cdot y + x \cdot z$

$\forall x \in F \quad x \cdot 0 = 0$
$x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot [0+0]$
$= x \cdot 0$
$= x \cdot 0 + 0$
$\Rightarrow x \cdot 0 = 0$

Si $x \neq 0$ entonces $x^{-1} \neq 0$
DEMOSTRACIÓN.

$-x = -1 \cdot x$
$x + (-x) = 0$
$x + (-1 \cdot x) = (1 \cdot x) + (-1 \cdot x)$
$= x(1 + (-1))$
$= x(0)$
$= 0$

$xy + (-x)(y) = y[x + (-x)]$
$= (y)(0)$
$xy + (-x)(y) = 0$
$xy + [(xy)] + (-x)(y) = 0 + [-(xy)]$
$0 + (-x)(y) = -(xy)$
$(-x)(y) = -(xy)$

Nombre:
Tema:

Día	Mes	Año	Folio

SUSTRACCIÓN Y DIVISIÓN

TAREA PROBAR d

$\forall x, y \in F$ DEFINO
$x - y = x + (-y)$
(X MENOS Y)

$\forall x, y \in F$ $y \neq 0$ DEFINO
$x \div y = x \cdot (y^{-1})$

TEOREMA 4

a) $\forall x \in F$ $0 - x = -x$
b) $\forall x, y, z \in F$ $x(y-z) = xy - xz$
c) $\forall x, y \in F$ $-(x+y) = -x - y$
d) $\forall x, y \in F$ $-(x-y) = y - x$

a) POR DEFINICIÓN
$0 - x = 0 + (-x)$
$= (-x) + 0$
$= -x$

b) POR DEFINICIÓN
$y - z = y + (-z)$
$x(y-z) = x(y + (-z))$
$= xy + x(-z)$
$= xy + (-xz)$
$= xy - xz$

c) YA PROBÉ QUE $\forall x \in F$ $-x = -1 \cdot x$
$-(x+y) = -1(x+y)$
$= (-1)x + (-1)y$
$= -x - (-y)$
$= -x - y$

d) $\forall x, y \in F$ $-(x-y) = y - x$
POR DEF. $-x = -1 \cdot x$
$-x - y = -1 \cdot x - y$
$-1(-x-y) = -1 \cdot x - y \cdot 1$
$-(-x-y) = -1 \cdot x - y \cdot 1$
$-(-x-y) = -y \cdot 1 \; (-1 \cdot x)$
$= y + x$

$\therefore -(x-y) = y - x$

Nombre:

Tema:

Día	Mes	Año	Folio

$A_0 =$ EN ESTE CASO $\forall x, y \in F \quad x+y \in F$

SI $x+y = w$ Y $x+y = z \Rightarrow w = z$

$1+(2+3) = 1+0 = 1$

$(1+2)+3 = 3+3 = 1$

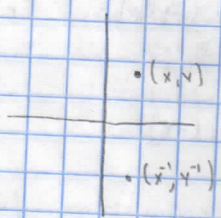
$A_1 = \forall x, y \in F, \ x+y = y+x$

$A_2 = \forall x, y, z \in F \quad (x+y)+z = x(y+z)$

$A_3 = \exists\, 0 \in F$ t.q. $\forall x \in F \quad x+0 = x$

$A_4 = \exists\, y \in F$ t.q. $\forall x \in F \quad x+y = 0 \quad y = -x$

$F = \mathbb{R}^2$



$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$

$(x,y)\cdot(x',y') = x \cdot x' + y \cdot y'$

NO ES CAMPO PUES

$(x,y)\cdot(x',y') \notin \mathbb{R}^2$

---

d) SABEMOS QUE $x \cdot 0 = 0 \quad \forall x \in F$

Y $x \cdot x$ ES ÚNICA

$\therefore$ SI $x \cdot y = 0$ ENT $x = 0$ ó $y = 0$

$\therefore$ SI $x \neq 0$ ENT $y = 0$ (FALSO)

σ) QUIERO PROBAR $(-1)(-1) = 1$

$(-1)(-1) = -(-1) = 1$

$\therefore (-1)x = -x$

---

g) QUIERO PROBAR $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

SABEMOS $(x \cdot y)\cdot(x \cdot y)^{-1} = 1$

$\Rightarrow (x \cdot y)\cdot x^{-1} \cdot y^{-1} = (yx)\, x^{-1} \cdot y^{-1} = y(x \cdot x^{-1})\, y^{-1}$

$= y 1 y^{-1}$

$= y y^{-1} = 1$

QUIERO PROBAR $(-1)x = -x$

SABEMOS QUE $x + (-x) = 0$

$-x + x = 0$

POR OTRO LADO $-x + -(-x) = 0$

$x + (-1)x = 0$

$1 \cdot x + (-1)x = 0$

$x(1 + (-1)) = 0$

$x \cdot 0 = 0$

$x + (-x) = 0$

Nombre:
Tema:

Día	Mes	Año	Folio
18	08	2015	

ORDEN EN UN CAMPO

DEF = UN CAMPO F SE DICE QUE ESTÁ ORDENADO CON RESPECTO A UN DETERMINADO SUBCONJUNTO $P \subset F$ SI EL SUBCONJUNTO P SATISFACE:

O_1 $\forall x,y \in P$, $x+y \in P$ (CERRADO BAJO +)

O_2 $\forall x,y \in P$, $x \cdot y \in P$ (CERRADO BAJO ·)

O_3 $\forall x \in F$ OCURRE UNA Y SOLO UNA DE LAS SIGUIENTES.
$x \in P$, $-x \in P$ ó $x = 0$ (LEY DE TRICOTOMÍA)

DEF. SI $x \in P$, DECIMOS QUE x ES POSITIVO.
SI $-x \in P$, DECIMOS QUE x ES NEGATIVO.
POR TANTO SEGÚN O_3 CADA ELEMENTO DE UN CAMPO PUEDE SER POSITIVO, NEGATIVO, CERO

DEF. DECIMOS QUE $x < y$ SI $y - x \in P$
DEF. DECIMOS QUE $x > y$ SI $y < x$
DEF. UNA Y SOLO UNA SE CUMPLE $x > y$, $x < y$, $x = y$
DEF. DECIMOS QUE $x \leq y$ SI $x < y$ O $x = y$
DEF. DECIMOS QUE $x \geq y$ SI $x > y$ Ó $x = y$

TEOREMA:
SEAN x, y ELEMENTOS DE UN CAMPO ORDENADO F. ENTONCES

a) $x > 0$ SI Y SÓLO SI $x \in P$
b) $x < 0$ SI Y SÓLO SI $-x \in P$
c) $x \leq y$ SI Y SÓLO SI $x \not> y$
d) $x \geq y$ SI Y SÓLO SI $x \not< y$
e) SI $x \leq y$ Y $y \leq x$ ENTONCES $x = y$

Nombre:
Tema:
Día | Mes | Año | Folio

Teorema 5:

$\boxed{x \div y = x \cdot (y^{-1})}$

a) $\forall x \in F$, si $x \neq 0$ ENTONCES $0 \div x = 0$

DEM.

si $x \neq 0 \Rightarrow \exists! \; x^{-1} \in F$

POR DEFINICIÓN

$0 \div x = 0 \cdot (x^{-1}) = 0$

b) $\forall x \in F$, $x \div = x$

y si $x \neq 0$ $1 \div x = x^{-1}$

DEM.

POR DEFINICIÓN

$x \div 1 = x \cdot (1^{-1})$

$= x \cdot (1)$

$= x$

c) $\forall x \in F$, si $x \neq 0$ ENTONCES

$(-x)^{-1} = -(x^{-1})$

$(-x)^{-1}(-x) = 1$

$(-x)(-x^{-1}) = (1)\,x\,(-1)(x^{-1})$

$= (-1)(-1)\,x\,(x^{-1})$

$= (1) = 1$

TODOS LOS INVERSOS SE PRUEBAN POR UNICIDAD

$(-1)(-1) = 1$

$= -1 + (-1)(-1)$

$= (-1)(1) + (-1)(-1)$

$= (-1)(1 + (-1))$

$= (-1)(0) = 0(-1)^{-1}$

d) $\forall y \neq 0$ $\frac{x}{y} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

DEM.

$x = 0 \rightarrow \frac{x}{y} = 0$

$\Leftarrow$ POR DEFINICIÓN

$x \cdot y^{-1} = 0$

$\Rightarrow x \neq 0$

POR DEFINICIÓN

$\frac{x}{y} = 0$

$= x \cdot y^{-1}$

$= 0 \cdot y^{-1} = 0$

e) Si $b, c \neq 0$ ENTONCES $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

DEM. $b \neq 0 \Rightarrow \exists! \, b^{-1}$

$c \neq 0 \Rightarrow \exists! \, c^{-1}$

$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

$= a \cdot b^{-1}(1)$

$= ab^{-1}(c \cdot c^{-1})$

$= ac(b^{-1} \cdot c^{-1})$

$= \frac{ac}{bc}$

$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$(ab)((ab)^{-1}) = 1$

$(ab(a^{-1}b^{-1}) = a \cdot a^{-1} b b^{-1}$

$= 1$

f) si $b, d \neq 0$ ENTONCES

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$

DEM $\frac{a}{b} + \frac{a}{d} = a \cdot b^{-1} + cd^{-1}$

$= a \cdot b^{-1}(d \cdot d^{-1}) + cd^{-1}(b \cdot b^{-1})$

$= ad \cdot (b^{-1}d^{-1}) + cb\,(b^{-1}d^{-1})$

$= (ad + cb) \cdot (bd)^{-1}$

$= \frac{ad + cb}{bd}$

Nombre: | Día | Mes | Año | Folio
Tema:

si $b, d \neq 0$

g) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ASOCIAR Y CONMUTAR

h) $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ UNICIDAD

i) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ UNICIDAD

j) si $a \neq 0$ $ax + c = 0$ TIENE UNA ÚNICA SOLUCIÓN

g) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})$

$\Rightarrow a(b^{-1}) + c(d^{-1})$

$\Rightarrow a + c \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1})$

$\Rightarrow \frac{ac}{bd}$

h) $-\left(\frac{a}{b}\right) = -(a \cdot b^{-1}) \Rightarrow (-1)\, a \cdot b^{-1} \Rightarrow \frac{-a}{b}$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right) \cdot -1 \Rightarrow \frac{a}{-b}$

$\Rightarrow -\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

i) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \Rightarrow (a^{-1}(a)) \cdot (b^{-1}(b))$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow (b \cdot a)$

$\Rightarrow (b \cdot a(-1))$

$\Rightarrow b \cdot (-a)$

$\frac{b}{a}$

j) si $a \neq 0$ $ax + c = 0$

ENTONCES $a \neq 0 \Rightarrow x, c = 0$

$\Rightarrow x = 0$ y $c = 0$

$\Rightarrow ax = 0$

$\Rightarrow ax + c = 0$

Nombre:
Tema:

Día	Mes	Año

Folio

OBS / DADO $(a+\sqrt{2}b) \in F$ VEMOS QUE $(-a+\sqrt{2}(-b))$ ES EL INVERSO ADITIVO

PUES $(a+\sqrt{2}b) +_F (-a+\sqrt{2}(-b)) = (a-a)+\sqrt{2}(b-b)$

$= 0+\sqrt{2}(0) = 0_F$

INVERSO MULTIPLICATIVO

TENGO $(a+\sqrt{2}b) \in F$, tq

$(a+\sqrt{2}b) \neq 0_F = (0+\sqrt{2}(0)$

ENT. $a\neq$ y $b\neq 0$

DAME UN $(a'+\sqrt{2}b')$ tq

$(a+\sqrt{2}b) \cdot_F (a'+\sqrt{2}b') = 1_F = (1+\sqrt{2}(0))$

$(aa'+2bb'+\sqrt{2}(ab'+a'b)$

ENT

$aa'+2bb'=1$

$a'b+ab'=0$

ENTONCES TENEMOS UN SISTEMA DE ECUACIONES DE 2×2

Pd DEF $(S)\neq 0$

$$DEF\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2-2b^2$$

POR QUE $a^2-2b^2\neq 0$

SUPONGAMOS $a^2-2b^2=0$

$\Rightarrow a^2=2b^2$

$\Rightarrow \sqrt{a^2}=\sqrt{2b^2}=\sqrt{2}b$

$a=\sqrt{2}b \notin Q$ ▲

PUES $a\in Q$

$a^2-2b^2\neq 0$

POR CRAMER TIENE UNA ÚNICA SOLUCIÓN

CONSTRUYAMOSLAS

$$a' = \frac{\det a'}{\det(S)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & a \end{pmatrix}}{a^2-2b^2} \qquad a' = \frac{a}{a^2-2b^2}$$

$$b' = \frac{\det b'}{\det(S)} = \frac{\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}}{a^2-2b^2} \qquad b' = \frac{-b}{a^2-2b^2}$$

ENTONCES

$$(a+\sqrt{2}b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2-2b^2}\right)+\sqrt{2}\left(\frac{-b}{a^2-2b^2}\right)$$

Nombre: | Día | Mes | Año | Folio
Tema:

PRUEBA: Tenemos que $\forall_{i=1,\dots,n}$ se tiene $1 \in I$ pues I_i es inductivo $\therefore 1 \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$

Si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$ ent. $\forall_{i=1,\dots,n}$ $x+1 \in I_i$ $\therefore$ $x+1 \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i$

TEOREMA: El conjunto de los números naturales es el más pequeño subconjunto inductivo $A \subset \mathbb{R}$

Es decir si A es inductivo $A \supset \mathbb{N}$

Entonces $\forall A_i$ inductivo $\mathbb{N} = \cap A_i \subset A_i$

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Dada una proposición P
se tiene que P es válida $\forall_{n \in \mathbb{N}}$ si:
(i) $P(1)$ es verdadera
(ii) $\forall_{k \in \mathbb{N}}$ $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
Entonces $\forall_{n \in \mathbb{N}}$, $P(n)$ es verdadera.

PRUEBA: Tenemos que
$1 \in A$ (A es un conjunto de elementos para los cuales $P(x)$ es válida $\forall_{x \in A}$) ✓
por otro lado $x \in A$ | $P(x)$ es válida $\Rightarrow P(x+1)$ es válida

$\therefore$ $x+1 \in A$ $\therefore$ A es inductivo como $\mathbb{N} < A$
Entonces $\forall_{n \in \mathbb{N}}$, $P(n)$ es verdadera ✓

Nombre:
Tema:

Día | Mes | Año | Folio

TEOREMA 4.

EN ALGÚN CAMPO ORDENADO F
$\mathbb{N}_F$: ES CERRADO BAJO LA SUMA.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $n \in \mathbb{N}_F$
$P(m) = n+m \in \mathbb{N}_F$ [$\mathbb{N}_F$ CLARAMENTE ES INDUCTIVO]
1. $P(1) = n+1 = n \in \mathbb{N}_F$
$P(1)$ ES VERDADERA

SUP. $P(k)$ ES VERDADERA
$\Rightarrow n+k \in \mathbb{N}_F$
COMO $\mathbb{N}_F$ ES INDUCTIVO
$\Rightarrow (n+k)+1 \in \mathbb{N}_F$
$\Rightarrow P(k+1) \rightarrow$ ES VERDADERA

$\forall n,m \in \mathbb{N}_F \quad n+m \in \mathbb{N}_F$

TEOREMA 5.

EN ALGÚN CAMPO ORDENADO F
$\mathbb{N}_F$: ES CERRADO BAJO LA SUMA.

DEMOSTRACIÓN:

SEA $n \in \mathbb{N}_F$ f.00
$P(m) = n \cdot m \in \mathbb{N}_F$
$P(1) = n \cdot 1 = n \in \mathbb{N}_F$
$P(1)$ ES VERDADERA

SUP $P(k)$ ES VERDADERA

$\Rightarrow nk \in \mathbb{N}_F$
POR EL TEOREMA 4
$nk + n \in \mathbb{N}_F$
$n(k+1) \in \mathbb{N}_F$
$P(k+1)$ ES VERDADERA

$\forall n,m \in \mathbb{N}_F \quad n \cdot m \in \mathbb{N}_F$

TEOREMA 6.

TODO LOS ELEMENTOS EN $\mathbb{N}_F$ SON POSITIVOS

DEMOSTRACIÓN:

$P(m) = m \in P$
$P(1) = 1 \in P$
$P(1)$ ES VERDADERA

SUPONGO QUE $P(k)$ ES VERDADERA

$\Rightarrow k \in P$
$\Rightarrow k+1 \in P$
$\Rightarrow P(k+1)$ ES VERDADERO

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}_F \; n \in P$

TEOREMA 7.

EN ALGÚN CAMPO ORDENADO F, $\mathbb{N}_F$
NO ES CERRADO BAJO RESTA Y DIVISIÓN.

OBS. $\forall n,m \in F$
$n-m \in P$ ó $n-m \notin [P \cup \{0\}]$
ó $n-m = 0$ [TRICOTOMÍA]

DEMOSTRACIÓN
SEA $n \in \mathbb{N}_F$
$n-n = n+(-n)$
$= 0 \notin \mathbb{N}_F$
$\Rightarrow$ LA RESTA NO ES CERRADA

tarea!

Nombre:
Tema:

Día	Mes	Año

Folio

EJEMPLO

EULER (1707 - 1783)

$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2+n+41$ ES PRIMO

$n=1 \quad 1+1+41=43$

$n=2 \quad 4+2+41=47$

$n=3 \quad 9+3+41=53$

$n=40 \quad X$

DEF. (POTENCIA)

$\forall r \in \mathbb{R}$

$r^0=1$

$r^1=r$

$r^k=r\left(r^{k-1}\right)$

$$\sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$1+2+3+m = \frac{m(m+1)}{2}$$

DEMOSTRACIÓN

BASE INDUCTIVA

$m=1$

$$\sum_{n=1}^{m=1} n = 1 = \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN $(m=k$

SUP. VERDADERO DADA $m=k$

$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$$

PASO INDUCTIVO $(m=k \Rightarrow m=k+1)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{k+1} n = \frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

DEMS.

$$\sum_{n=1}^{k+1} n = \frac{1+2+\cdots+k+k+1}{k}$$

$$= \sum_{n=1}^{k} n + k+1$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

11 10

Nombre: Tema: Día Mes Año Folio

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{i=1}^{n} i(i+2)$ $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

DEMOSTRACIÓN.

BASE INDUCTIVA $(n=1)$

$$\sum_{i=1}^{n=1} i(i+2) = \frac{1(2)(9)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\Bigg|_{n=1}$$

HIP. INDUCTIVA $(n=k)$

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$$

PASO INDUCTIVO $(n=k \Rightarrow n=k+1)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k+1} i(i+2) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i(i+2) = \left[\sum_{i=1}^{k} i(i+2)\right] + (k+1)(k+3)$$

$$= [1\cdot 3 + 2\cdot 4 + \cdots k(k+2)] + (k+1)(k+3)$$

$$= \frac{(k)(k+1)(2k+7)}{6} + \frac{6(k+1)(k+3)}{6}$$

$$= \left[\frac{k+1}{6}\right]\left[k(2k+7) + 6(k+3)\right]$$

$$= \left(\frac{k+1}{6}\right)\left[2k^2 + 13k + 18\right]$$

$$= \left(\frac{k+1}{6}\right)\left(2k^2 + 4k + 9k + 18\right)$$

$$= \quad '' \quad 2k(k+2) + 9(k+2)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

▲

$2^n > n^2 + 4n + 5$

$\forall\ n \geq 7$ con $n \in \mathbb{N}$

OBS $n=1$

$2^1 = 2 \not> 1^2 + 4(1) + 5$

$= 10$

BASE INDUCTIVA $(n=7)$

$2^7 = 128 > 82 = 7^2 + 4(7) + 5$

HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN $(n=k)$

$2^k > k^2 + 4k + 5$

PASO INDUCTIVO $(n=k \rightarrow n=k+1)$

$$\boxed{2^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5}$$

DEM

$2^{k+1} = 2(2^k)$

$2(2^k) > 2(k^2 + 4k + 5)$