Nombre:		Día	Mes	Año	Folio
Tema:		6	OCT	2015	1

SUCESIONES DE CAUCHY

TEOREMA B-W

TODA SUCESIÓN ACOTADA TIENE SUBSUCESIÓN CONVERGENTE $(\mathbb{R})$

EJEMPLOS

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$
$$1 + 1 + 1 + 1 \cdots$$

NO CONVERGE

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2^n}$$
$$\frac{1}{2} b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$b - \frac{1}{2} b = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$
$$\lim_{n \to \infty} b_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$a_n = (-1)^n + 1$

$a_1 = 0$

$a_2 = 2$

$a_3 = 0$

$a_4 = 2$

NO CONVERGE

$$\left.\begin{array}{l} a_{2i} = 2 \\ a_{2i-1} = 0 \end{array}\right\} \text{PERO TIENE DOS SUBSUCESIONES CONVERGENTES}$$

$a_n = \text{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

$a_1 = 1$

$a_2 = 0$ TIENE 3 SUBSUCESIONES CONVERGENTES

$a_3 = -1$ 1, 0, -1

$a_4 = 0$

$a_5 = 1$

$b_n = a_{2i} = 0$

$c_n = a_{4i+1} = 1$

$d_n = a_{4i-1} = -1$

NOTA: a_n NO ES ACOTADA, PERO B-W ASEGURA LA EXISTENCIA DE UNA/S SUBSUCESIÓN

SI $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ES DE CAUCHY, $\Rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ES CONVERGENTE.

DEM.

SI $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ES DE CAUCHY

$\Rightarrow |a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$

TBW

$\Rightarrow \exists a_{n_i}$ tq a_{n_i} ES CONVERGENTE.

Nombre:

Tema:

Día	Mes	Año	Folio
			2

COMO $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ES DE CAUCHY PARA $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N\in\mathbb{N}$ tq

SI $n,m>N$ $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$

COMO $(a_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}}$ ES CONVERGENTE

$\Rightarrow \exists L\in\mathbb{R}$ tq $\forall \frac{\varepsilon}{2}>0$ $\exists M\in\mathbb{N}$

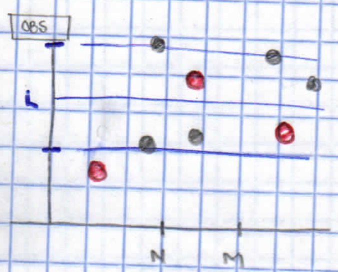
tq SI $n>M$ $|a_{n_i}-L|<\frac{\varepsilon}{2}$

SEA $P=\max(N,M)$

SI $n_i, n>P$

$\Rightarrow |a_n-a_{n_i}|<\frac{\varepsilon}{2}$ [POR SER DE CAUCHY]

$|a_{n_i}-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ [POR SER UNA SUBSUCESIÓN CONVERGENTE]



$\Rightarrow |a_n-L| = |a_n-a_{n_i}+a_{n_i}-L|$

$\leq |a_n-a_{n_i}|+|a_{n_i}-L|$

$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$D_n[x]$ = LOS PRIMEROS n DECIMALES DESPUÉS DEL PUNTO EN X.

$D_2[0]=0$

$D_3[\frac{1}{3}]=3$

$D_5[\frac{2}{5}]=.40000$

DEMUESTRA QUE PARA $x\in\mathbb{R}$ FIJA $a_n=D_n[x]$ ES DE CAUCHY.

$D_n[x]=.d_1d_2d_3d_4\dots d_n$

$x=\sum_{i=1}^{\infty} d_i 10^{-i} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j 10^{j}$

BORRADOR

$n,m>N$

$|a_n-a_m|<\varepsilon$

$|D_n[x]-D_m[x]|<10^{-N}$

$\varepsilon=10^{-N}$

$N=\log_{10}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$a_n=.d_1d_2\dots d_n$

$a_m=.d_1,d_2\dots d_n,d_{n+1}\dots d_m$

Nombre:

Tema:

Día	Mes	Año	Folio
			3

BORRADOR

si $m,n > N$

$|b_n - b_m| < \varepsilon$

$$\left| \sum^{n} \frac{1}{i^2} - \sum^{m} \frac{1}{i^2} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{i=|n-m|+1}^{\max(n,m)} \frac{1}{i^2} \right| < \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=N}^{\infty} -\frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} = \frac{1}{N-1}$$