Nombre: Tema: Día Mes Año Folio

# NÚMEROS ENTEROS:

DEF. El conjunto de números enteros de un campo ordenado $F$ es el conjunto.

$$\mathbb{Z}_F = \{ x \in F \mid x \in \mathbb{N}_F \text{ ó } -x \in \mathbb{N}_F \text{ ó } x = 0 \}$$

★ todas Para el Viernes.

$A_0$ $a, b \in \mathbb{Z}$
$a+b \in \mathbb{Z}$

DEM. HIP. Sea $a, b \in \mathbb{Z}$
$a$ ó $-a \in \mathbb{N}$
$b$ ó $-b \in \mathbb{N}$
ó $a$ ó $b = 0$

CASO 1 $a, b \in \mathbb{N}$
$a > 0$ $b > 0$ $= a+b \in \mathbb{N}$ de cerradura en $\mathbb{N}$.

CASO 2 $a, -b \in \mathbb{N} \Rightarrow -a + (-b) \in \mathbb{N}$
$-(a+b) \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Z}$

CASO 3
$a > -b > 0$ ó $0 < a < -b$
$a+b > 0$ ó $b < a+b < 0$
$a+b \in \mathbb{N}$ ó $-(a+b) \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a+b \in \mathbb{Z}$

▲

Axiomas de campo ♡

$M_0$ $a, b \in \mathbb{Z}$
$ab \in \mathbb{Z}$

$A_1$ $a, b \in \mathbb{Z}$
$a+b = b+a$

$M_1$ $a, b \in \mathbb{Z}$
$ab = ba$

$A_2$ $a, b, c \in \mathbb{Z}$
$(a+b)+c = a+(b+c)$

$M_2$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$a \in \mathbb{N}$ $b \in \mathbb{N}$
$ab \in \mathbb{N} \Rightarrow ab \in \mathbb{N}$
$(-a)(-b) \in \mathbb{N} = ab \in \mathbb{N}$
$-a \in \mathbb{N} \Rightarrow ab \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$
$(-ab \in \mathbb{N} = -(ab)$ $ab \in \mathbb{Z}$

Nombre:
Tema:

| Día | Mes | Año |
|---|---|---|
| | | |

Folio

$2^n > n^2 + 4n + 5$

DEM

BASE IND $(n=7)$

$2^7 > (7)^2 + 4(7) + 5$

$128 > 82$

HIP. IND $(n = k$

$2^k > k^2 + 4k + 5$

PASO IND $(n = k+1$

$2^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$

$= k^2 + 2k + 1 + 4k + 4 + 5$

$= k^2 + 4k + 5 + 2k + 5$

$2(2^k) > 2k^2 + 8k + 10$

$2^{k+1} > k^2 + 2k + 1$

$k^2 + 6k + 9$

$2^{k+1} > (k+1)^2 + k^2 + 6k + 9$

$2^{k+1} > (k+1)^2 + 4k + 4\ k^2 + 2k + 5$

$2^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + k^2 + 2k$

$2^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + k^2 + 2k > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$

OBS

$k^2 + 2k > 0$

$k(k+2) > 0$

pues $k \geq 7$

# NÚMEROS RACIONALES:

CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES DE UN CAMPO ORDENADO $F$ ES EL CONJUNTO

$$\mathbb{Q} = \{ x \in F \,/\, \exists\, m, n \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } n \neq 0 \text{ y } x = \tfrac{m}{n} \}$$

$A_1$

SEA $x, y \in \mathbb{Q}$ t.q. $x = \frac{m}{n}$ $y = \frac{p}{q}$

$$\therefore x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq} \in \mathbb{Q}$$

PUES $m \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow mq \in \mathbb{Z}$

$p \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow pn \in \mathbb{Z}$

$$\therefore mq + pn \in \mathbb{Z}$$

ADEMAS $n \neq 0$, $q \neq 0$

$$\therefore nq \neq 0$$

$A_3$ SEA $x \in \mathbb{Q}$ t.q. $x = \frac{m}{n}$

CONSIDERO $y = \frac{0}{p} \in \mathbb{Q}$

$$\therefore x + y = \frac{mp + 0n}{pn} = \frac{m}{n}$$

$\therefore \forall x = \frac{m}{n}\ \exists\, y = \frac{0}{p} \in \mathbb{Q}$ t.q. $x + y = x$

$A_4$ SEA $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ y CONSIDERO $y = \frac{-m}{n}$

t.q. $x + y = \frac{m}{n} + \frac{(-m)}{n} = 0$

$\therefore \forall x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{m}{n}\ \exists\, y = \frac{-m}{n}$

t.q. $x + y = 0$

Nombre:

Tema:

Día | Mes | Año

Folio

8.- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Si $n \geq 1$ $\quad n! = n(n-1)\cdots(1)$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ej. } 3! = 3\cdot 2\cdot 1 \\ 0! = 1 \\ \text{Ej. } \frac{7!}{6!} = \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}} = 7 \end{array}}$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cdots\cancel{1}}{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cdots\cancel{1}} = n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\left(\frac{k}{k}\right)\left(\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}\right) + \frac{n!}{(k!)(n-k)!}\left(\frac{n-k+1}{n-k+1}\right)$$

$$\frac{k(n!)}{k!\,(n-k+1)} + \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{k(n!) + n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

Nombre: Inducción

Tema:

| Día | Mes | Año | Folio |
|---|---|---|---|
| | | | |

4.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
$$(\forall a,b \in \mathbb{R})$$

DEM.

BASE INDUCTIVA

$$n=1 \quad (a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a b^0 + \binom{1}{1} a^0 b = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{n-k} b^k$$

HIP. IND. $(n=m)$

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \checkmark$$

$$\boxed{\text{P.d} \quad (a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m+1-k} b^k}$$

DEM.

$$(a+b)(a+b)^m = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k\right)$$

$$(a+b)^{m+1}$$
$$= (a+b)\left[a^m + \left[\sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k\right] + b^m\right]$$
$$= a^{m+1} + a\left(\sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k\right) + ab^m + a^m b + b\left(\sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k\right) + b^{m+1}$$
$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + ab^m + a^m b + \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} + b^{m+1}$$
$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1} + b^{m+1}$$
$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^{m-(k-1)} b^{(k-1)+1}$$
$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^{m+1-k} b^k + b^{m+1}$$
$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right] a^{m+1-k} b^k + b^{m+1}$$
$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k + b^{m+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{(m+1)-k} b^k$$

Nombre: Tema: Día Mes Año Folio

$x \neq 0$

Si $x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\Rightarrow x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

DEM.

$x \in \mathbb{Q}$ i $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ i $x+y \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow x = \frac{a}{b}$ con $a,b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$ i $y \neq \frac{c}{d}$ $\forall c,d \in \mathbb{Z}$ i $x+y = \frac{e}{f}$ $e,f \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow y = \frac{e}{f} - x = \frac{e}{f} - \frac{a}{b} = \frac{eb-af}{fb}$

$\exists$ $c = eb-af \in \mathbb{Z}$
$d = fb \neq 0 \in \mathbb{Z}$

$\therefore x+y \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Si $x \in \mathbb{Q}$ y $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\Rightarrow x \cdot y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

DEM.

$x \in \mathbb{Q}$ i $y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ i $x+y \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow x = \frac{a}{b}$ con $a,b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$ i $y \neq \frac{c}{d}$ $\forall c,d \in \mathbb{Z}$ i $x+y = \frac{e}{f}$ $e,f \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ $x \cdot y = \frac{e}{f}$ $y = \frac{e}{f}(x^{-1}) = \frac{e}{f}\left(\frac{b}{a}\right)$

$\exists$ $c = e \cdot b$
$d = f \cdot a$

$\therefore x \cdot y \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

OBS.

Si $x,y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ¿$x+y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$? NO    ¿$x \cdot y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$? NO

$x = \sqrt{2}$    $x+y = 0 \in \mathbb{Q}$
$y = -\sqrt{2}$

$x = \sqrt{2}$
$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$    $x \cdot y = 1 \in \mathbb{Q}$

tarea moral

NEUTRO ADITIVO Y NEUTRO MULT. ES $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Nombre:
Tema:

| Día | Mes | Año |
|---|---|---|
| | | |

Folio

SEA $A \in \mathbb{R}$, SE DICE QUE $A$ TIENE ELEMENTO MÁXIMO (MÍNIMO)
SI $\exists x \in A$ t.q. $x \geq y \ \forall_y \in A$ ($x \leq y \ \forall_{\in A}$)

$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

MAX $(A) = 1 = \frac{1}{1}$ $\left(\begin{matrix} n \geq 1 \\ \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1 \ \forall n \end{matrix}\right)$

MIN $(A) =$ NO EXISTE

$\left(\begin{matrix} \min(A) = \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} > \frac{1}{m+1} \end{matrix}\right)$

$B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$

MAX $(B) = 1$
MIN $(B) = -1$