Nombre:	
Tema:	

Día	Mes	Año	Folio
3	SEP	2015	

SUPREMO E INFIMO:

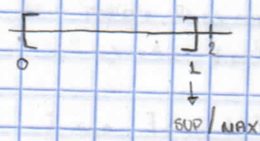
SUPREMO = MÍNIMO COTA SUPERIOR

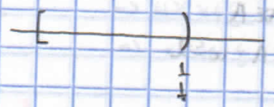
DEF. SUP. F UN CAMPO ORDENADO Y $\emptyset \neq A \subseteq F$. DECIMOS QUE SI $\exists\, u \in F$ tq

- u ES COTA SUPERIOR DE A
- $\forall v$ COTA SUPERIOR DE A $u \leq v$

ENTONCES u ES UN EXTREMO SUPERIOR (SUPREMO) DE A.

→ SI u ESTÁ $\in A$ HABLAMOS DE MÁXIMO DE A.
COTA SUPERIOR





SOLO ES SUPREMO Y NO MÁXIMO
POR QUE 1 NO ES PARTE DEL CONJUNTO

- l ES COTA INFERIOR DE A
- $\forall w$ COTA DE A $w \leq l$

ENTONCES l ES UN EXTREMO INFERIOR (INFIMO) DE A

= AXIOMA DEL SUPREMO =

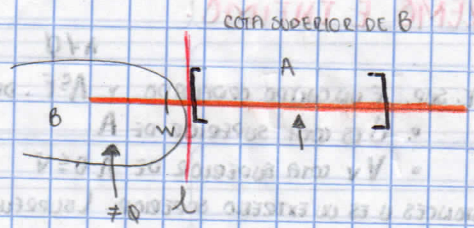
SI F ES UN CAMPO ORDENADO Y $\emptyset \neq A \subseteq F$ tq $\exists\, u \in F$ COTA SUPERIOR DE A, ENTONCES $\exists \sup(A)$

TEOREMA 1 (INFIMO)

SI F ES UN CAMPO ORDENADO Y $\emptyset \neq A \subseteq F$ tq $\exists\, w \in F$ COTA INFERIOR DE A, ENTONCES $\exists \inf(A)$

Nombre: | Tema: | Día 3 | Mes SEP | Año 2015 | Folio

DEM. (TEOREMA 1)



$B = \{$ cotas inferiores de $A \}$

$B \neq \emptyset$

$\exists x \in A$

X es cota superior de B

$\exists$ sup $(B) = l$

$\left[\begin{array}{l} \cdot\ w \leq l \quad \forall w \\ \text{cota inferior de } A \end{array}\right]$

propongo a l como inf (A)

$\cdot\ l \leq x \quad \forall x \in A$

DEM.

x es cota superior de B $\forall x \in A$

$\Rightarrow l \leq x \quad \forall x \in A$

INF $(A) = l$

l es cota inf de A

$\forall w$ cota inf de A $\ w \leq l$

sea w cota inf de A por def de B

$w \in B$ y l es sup (B) en particular

es cota sup.

$\Rightarrow w \leq l \quad \forall w \in B$

TEOREMA 2. [UNICIDAD DEL SUPREMO]

sup F un campo ordenado y $A \subseteq F$ si A es tq $\exists$ sup (A)

ent. sup (A) es unico.

DEM.

sup que sup (A) no es un unico

$\Rightarrow U_1, U_2$ supremos de A.

U_1 es supremo de A en particular es cota superior,

por ser U_2 supremo

$\Rightarrow U_2 \leq U_1$

ANALOGAMENTE

$\Rightarrow U_1 \leq U_2$

$\Rightarrow U_1 = U_2$ ▽

$\therefore$ supremo (A) es único

Nombre:		Día	Mes	Año	Folio
Tema:		3	SEP	2015	

TEOREMA 3:

Supongamos F un campo ordenado y $\emptyset \subset A \subset F$ tq A es acotado superiormente

1. $x \leq M \ \forall x \in A$
2. $\sup(A) = M \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ tq $M < x + \varepsilon$

DEM.

$\Rightarrow$] 1. Sea $M = \sup(A)$

por def. M es cota superior de A.

$\Rightarrow x \leq M \ \forall x \in A$

2. Sup. $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall x \in A$

$\Rightarrow M \geq x + \varepsilon$

$\Rightarrow x \leq M - \varepsilon \ \forall x \in A \ [M > M - \varepsilon]$

$\Leftarrow$] M es tq $x \leq M \ \forall x \in A$ y $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$ tq $M < x + \varepsilon$

DEM.

1. M es la mínima cota superior $\Rightarrow M = \sup(A)$
2. M no es la mínima cota superior, entonces

$\exists M'$ cota superior

tq $M' < M$

$\Rightarrow M - M' > 0$

Sea $\varepsilon = M - M'$, por 2

$\exists x \in A$ tq $M < x + \varepsilon$

$\Rightarrow M < x + M - M'$

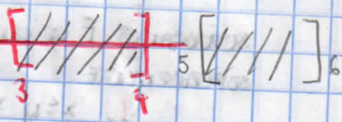
$\Rightarrow M < x$ pa $x \in A$ $\blacktriangledown$

Nombre:

Tema: SUPREMO = SUPERIOR / SUPREMO

Día	Mes	Año	Folio
3	SEP	2015	

TEOREMA 4.



SEA F UN CAMPO ORDENADO Y $\emptyset \neq A \subset F$ tq $\exists$ sup (A). SEA $x \in F$ SE DEFINE $A+x = \{ u+x \mid u \in A \}$

$\Rightarrow$ sup $(A+x) =$ sup $(A) + x$

DEM.

sup $(A) = m$

POR SER m EL SUPREMO $\forall a \in A \quad a \leq m$

$\Rightarrow \forall a \in A \quad a+x \leq m+x$

$\Rightarrow m+x$ ES COTA SUPERIOR DE $A+x$

SEA v COTA SUPERIOR DE $A+x$

$\Rightarrow a+x \leq v \quad \forall a+x \in A+x$

$\Rightarrow a \leq v-x \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow m \leq v-x$

$\Rightarrow m+x \leq v$

DEF. (COMPLETEZ)

UN CAMPO ORDENADO F ES COMPLETO SI $\forall A \subset F$ ACOTADO $\exists$ sup $(A) \in F$

TEOREMA 5.

SI F ES UN CAMPO ORDENADO COMPLETO Y $A, B \subset F$ tq $A \neq \emptyset$ Y $A \subset B$, B ACOTADO INFERIORMENTE ENTONCES $\exists$ inf (A) Y inf $(B) \leq$ inf (A) — DEMOSTRAR

PRINCIPIO "FORCING"

SUP. F ES UN CAMPO ORDENADO ARQUIMEDIANO Y $x, a, b \in F$

a) SI $\forall \varepsilon > 0 \quad x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0$

b) SI $\forall \varepsilon > 0 \quad x \leq a + \varepsilon \Rightarrow x \leq a$

c) SI $\forall \varepsilon > 0 \quad |x| \leq \varepsilon \Rightarrow x = 0$

d) SI $\forall \varepsilon > 0 \quad |a-b| \leq \varepsilon \Rightarrow a-b$

Nombre:

Tema:

Día	Mes	Año	Folio
3	SEP	2015	

DEM (a):

SUP. $\forall \varepsilon > 0 \quad x \leq \varepsilon$

Y $x > 0$

$\Rightarrow \frac{x}{2} > 0$, SEA $\varepsilon = \frac{x}{2}$

$x \leq \frac{x}{2}$

$1 \leq \frac{1}{2}$!

$2x \leq x$

$x + x \leq x$

$x \leq 0$!

PROBAR (b), (c), (d)

TODOS SON CONSECUENCIA DE (a)