Nombre:				Día	Mes	Año	Folio
Tema:				1	OCT	2015	1

$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n}$ $a>1$ $\forall_{k>0}$

$0 \leq \frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{f(g(a^n))} = \frac{n^k}{n\ln(a)} = \frac{n^k}{1+\frac{(n\ln(a))^1}{1!}+\frac{(n\ln(a))^2}{2}+\dots\frac{(n\ln(a))^k}{k!}+\frac{(n\ln(a))^{k+1}}{k+1}+\dots}$

NOTACIÓN: $\ln \to$ logaritmo natural

$f = \exp(x)$

$g = \ln(x)$

$\leq \frac{n^k}{\frac{(\ln(a))^{k+1}\, n^{k+1}}{k+1!}} = \frac{k+1!}{n(\ln(a))^{k+1}}$

OBS.

$f(x) = e^x$ $\qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$

$g(x) = \ln(x)$

$g(f(x)) = x = f(g(x))$

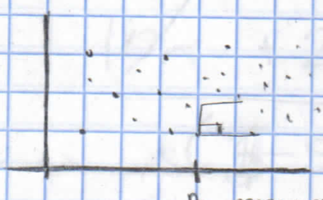
$e^{\lambda x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} = 1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \dots$

SUCESIONES DE CAUCHY !

UNA SUCESIÓN $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY SI CUMPLE

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq si $m,n>0$

$\Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$



n_0 A PARTIR DE ESTE n_0 TODAS ESTÁN A LA MISMA DISTANCIA, PERO SON MENORES QUE ε.

TENEMOS DOS CASOS

$n \leq n_0$

$|a_n| \leq \sum_{i=1}^{n_0} |a_i|$

$n > n_0$

$|a_n| \leq 1 + |a_{n_0+1}|$

EXPLICACIÓN

TEOREMA:

SI $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ES CONVERGENTE ENTONCES ES DE CAUCHY.

DEM.

POR HIPÓTESIS $\forall \varepsilon>0\ \exists_{N} \in \mathbb{N}$ [$\exists!$ - FIJO] tq si $n>N$ $|a_n - L| < \varepsilon$.

$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ con $\varepsilon_0 > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tq si $n>N$

$|a_n - L| < \varepsilon$

si $m>n>N$

$|L - a_m| = |a_m - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - L + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |a_m - L|$

$|a_n - a_m| < \varepsilon_0$

TEOREMA:

TODA SUCESIÓN DE CAUCHY ES ACOTADO

DEM.

SEA $\varepsilon = 1$ $\exists_{n_0} \in \mathbb{N}$ (FIJO Y FINITO)

si $m,n>n_0$ (s.p.g $m>n$)

$|a_n - a_m| < 1$ si $n > n_0$

$\Rightarrow |a_n - a_{n_0+1}| < 1$

$|a_n| = |a_n + a_{n_0+1} - a_{n_0+1}|$

$\leq |a_n - a_{n_0+1}| + |a_{n_0+1}|$

$\leq 1 + |a_{n_0+1}|$

SEAN $N = 1 + |a_{n_0+1}|$

$L = \sum_{i=1}^{n_0} |a_i|$

$M = \max(N, L)$

$|a_n| \leq M \ \forall n$

DADO UN $x \in \mathbb{R}$, EXISTE UNA SUCESIÓN MONÓTONA CRECIENTE $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DE NÚMEROS RACIONALES tq

$$\lim_{n \to \infty} r_n = x$$

DE IGUAL FORMA $\exists\, r_2 \in \mathbb{Q}$ tq

$\max\{r_1, x-\frac{1}{2}\} < r_2 < x$

$\exists\, r_3 \in \mathbb{Q}$ tq

$\max\{r_2, x-\frac{1}{3}\} < r_3 < x$

$\exists\, r_{k+1} \in \mathbb{Q}$ tq

$\text{máx}\{r_k, x-\frac{1}{k+1}\} < r_{k+1} < x$

SEA $a \geq 1$ Y $x \in \mathbb{R}$. SI $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ES UNA SUCESIÓN MONÓTONA CRECIENTE DE NÚMEROS RACIONALES QUE CONVERGEN A "x", ENTONCES (a^{r_n}) CONVERGE.

SABEMOS QUE $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ DADA POR $f(r) = a^r$

ES ESTRICTAMENTE CRECIENTE $a > 1$

CON ESTO SE TIENE $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ES CRECIENTE.

SI $r \in \mathbb{Q}$ ES UN RACIONAL tq

$r_n < x < r$

$\therefore a^{r_n} < a^r \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore (a^{r_n})$ ESTA ACOTADO SUPERIORMENTE POR a^r

DEF.

$a_n \to a$

$x_n \to x$

$y_n \to y$

- $a^x \quad x \in \mathbb{R}$

SEA $a \geq 1$ SE TIENE QUE $\forall x \in \mathbb{R}$ DEFINIMOS

$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} \quad (\text{Si } r_n \to x)$