Continuidad

Definición 1. *Una función f es continua en el punto $x_0 \in A$ $f : A \to \mathbb{R}$ si dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $0 \leq |x - a| < \delta$ con $x \in A$.*

1) $f(a)$ *existe*
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe*
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si al menos una de estas condiciones no se cumple, la función f es discontinua en $x = a$

Ejemplo Pruebe usando la definición para probar que la función $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ es continua en $x_0 = 2$

Solución En este caso tenemos que

$$f(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 1 = 7$$

Vamos a probar ahora que

$$\lim_{x \to 2} 3x^2 - 2x - 1 = f(2) = 7$$

es decir queremos mostar que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0,\ \ tal\ \ que\ \ |x - 2| < \delta\ \Rightarrow\ |3x^2 - 2x - 1 - 7| < \epsilon$$

Tenemos que

$$|3x^2 - 2x - 1 - 7| = |3x^2 - 2x - 8| = |3x + 4||x - 2|$$

Por lo tanto necesitamos

$$|3x + 4||x - 2| < \epsilon$$

Para esto fijamos un $\delta = 1$ y tenemos que

$$|x-2| < \delta\ \Rightarrow\ |x-2| < 1\ \Rightarrow\ -1 < x-2 < 1\ \Rightarrow\ 1 < x < 3\ \Rightarrow\ 3 < 3x < 9\ \Rightarrow\ 7 < 3x+4 < 13\ |3x+4| < 13$$

por lo que

$$|3x + 4||x - 2| < 13\ \delta$$

hacemos $\epsilon = 13\ \delta\ \Rightarrow\ \delta = \dfrac{\epsilon}{13}$ de manera que elegimos $\delta = \text{mín}\{1, \dfrac{\epsilon}{13}\}$ con esta δ se tiene

$$|x - 2| < \delta\ \Rightarrow\ |x - 2| < 1\ \ y\ \ |x - 2| < \frac{\epsilon}{13}$$

$$\Rightarrow\ \ -1 < x - 2 < 1\ \ y\ \ |x - 1| < \frac{\epsilon}{13}$$

$$\Rightarrow\ 1 < x < 3\ \ y\ \ |x - 1| < \frac{\epsilon}{13}$$

$$\Rightarrow\ 3 < 3x < 9\ \ y\ \ |x - 1| < \frac{\epsilon}{13}$$

$$\Rightarrow\ 7 < 3x + 4 < 13\ \ y\ \ |x - 1| < \frac{\epsilon}{13}$$

$$\Rightarrow\ |3x+4| < 13 \ \ y \ \ |x-1| < \frac{\epsilon}{13}$$

$$\Rightarrow |3x+4||x-2| < 13 \cdot \frac{\epsilon}{13}$$

$$|3x^2-2x-8| < \epsilon$$

$$\Rightarrow\ |3x^2-2x-1-7| < \epsilon$$

por lo tanto la función $f(x) = 3x^2-2x-1$ es continua en $x_0 = 2$

Ejemplo Demostrar que la función $f(x) = \sin x$ es continua en $x_0 = a$

Solución En este caso queremos mostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ tal\ \ que\ \ |x-a| < \delta\ \Rightarrow\ |\text{sen}\ \ x - \text{sen}\ \ a| < \epsilon$$

Usando la identidad

$$\sin x - \sin a = 2\sin\left[\frac{1}{2}(x-a)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(x+a)\right]$$

Tenemos que

$$|\sin x - \sin a| = \left|2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\right| \le \left|2\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| = |x-a| < \delta$$

Escogemos $\delta = \varepsilon$, entonces si

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x-a| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\sin x - \sin a| < \varepsilon$$

Ejemplo Demostrar que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}\ x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$ es continua en $x_0 = 1$

Solución En este caso queremos mostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \ tal\ \ que\ \ |x-0| < \delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{\text{sen}\ \ x}{x} - 1\right| < \epsilon$$

Tenemos que

$$\left|\frac{\text{sen}\ \ x}{x} - 1\right| = \left|1 - \frac{\text{sen}\ \ x}{x}\right|$$

Usando la desigualdad

$$\cos\ x \le \frac{\text{sen}\ \ x}{x} \le 1\ \Rightarrow\ -1 \le \frac{\text{sen}\ \ x}{x} \le \cos\ x\ \Rightarrow\ 0 \le 1 - \frac{\text{sen}\ \ x}{x} \le 1 - \cos\ x$$

se tiene

$$\left|1 - \frac{\text{sen}\ \ x}{x}\right| \le 1 - \cos\ x = 2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \le 2\left(\frac{x}{2}\right) \le |x|$$

Escogemos $\delta = \varepsilon$, entonces si

$$|x-0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\text{sen}\ \ x}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

por lo tanto la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}\ x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$ es continua en $x_0 = 1$

Ejemplo Pruebe que $f(x) = x^2 - x - 12$ es continua en $x_0 = 5$

Solución P.D. $\forall\ \ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \ \delta > 0$ tal que $0 < |x-5| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - x - 12 - 8| < \varepsilon$

Tenemos que $\quad |x^2 - x - 12 - 8| = |x^2 - x - 20| = |(x+4)(x-5)| = |x+4||x-5| < \delta|x-5| < \delta 10$

Vamos a fijar una vecindad $\delta = 1$

Por lo tanto si $\ 0 < |x-5| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x-5| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x-5 < 1 \quad \Rightarrow \quad 8 < x+4 < 10$

Escogemos el $\delta = min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{10}\right\}$

Se tiene entonces que si $0 < |x-5| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < |x-5| < \dfrac{\varepsilon}{10}$

$\Rightarrow \quad 0 < 10|x-5| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x+4||x-5| < 10|x-5| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x^2 - x - 12 - 8| < \varepsilon$

$\therefore\ \ f(x) = x^2 - x - 12$ es continua en $x_0 = 5$