Continuidad parte 2

Vamos a probar que

$$|a^x - 1| \leq 2|x|(a-1) \quad a > 1 \quad |x| \leq 1$$

Demostración. como $a > 1$ entonces $a^{\frac{1}{n}} > 1$ por lo tanto $\exists \lambda > 0$ tal que $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \lambda$ y de aqui se tiene

$$a = (1+\lambda)^n \geq 1 + n\lambda \Rightarrow \frac{a-1}{n} \geq \lambda$$

por lo tanto

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 = \lambda < \frac{a-1}{n}$$

y como $|x| \leq 1$ existen enteros tales que

$$\frac{1}{n+1} < |x| < \frac{1}{n}$$

por lo que

$$a^x - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n} < \frac{n+1}{n}(a-1)\frac{1}{n+1} < 2|x|(a-1)$$

$\square$

Ejemplo Demostrar que

$$\lim_{x \to a} e^x = e^a$$

Solución Buscando la δ

Debemos hallar un $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$ implique $|e^x - e^a| < \epsilon$

Para esto se tiene que

$$|e^x - e^a| = |e^a(e^{x-a} - 1)| = e^a \; |e^{x-1} - 1| \underbrace{<}_{|a^x-1|<2|x|(a-1)} 2 \; e^a|x-a|(e-1) \underbrace{<}_{|x-a|<\delta} e^a \; 2 \; \delta \; (e-1)$$

$\therefore$ si

$$\epsilon = \delta \; e^a \; 2 \; (e-1) \quad \textit{entonces} \quad \delta = \frac{\epsilon}{e^a \; 2 \; (e-1)}$$

Demostración. Sea $\delta = \dfrac{\epsilon}{e^a \; 2 \; (e-1)}$, con esta δ se tiene

$$0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; 0 < |x-a| < \frac{\epsilon}{e^a \; 2 \; (e-1)}$$

$$\Rightarrow \; (e^a \; 2 \; (e-1))\,|x-a| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \; |e^x - e^a| \leq (e^a \; 2 \; (e-1))\,|x-a| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \; |e^x - e^a| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to a} e^x = e^a$$

es decir $f(x) = e^x$ es continua en a. $\square$

Ejemplo Demostrar que

$$\lim_{x\to a} \ln(x) = \ln(a)$$

Solución Buscando la δ Tenemos que

$$|\ln(x) - \ln(a)| = \left|\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right| = \left|\ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)\right|$$

y si

$$\left|\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)\right| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < \ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right) < \epsilon \Rightarrow e^{-\epsilon} < 1+\frac{x-a}{a} < e^{\epsilon} \Rightarrow e^{-\epsilon}-1 < \frac{x-a}{a} < e^{\epsilon}-1$$

$$\Rightarrow a\cdot(e^{-\epsilon}-1) < x-a < a\cdot(e^{\epsilon}-1)$$

como

$$1-e^{-\epsilon} < e^{\epsilon}-1 \quad pues \quad 1-e^{-\epsilon} = \frac{e^{\epsilon}-1}{e^{\epsilon}} < e^{\epsilon}-1$$

Demostración. podemos definir

$$\delta = a\cdot(1-e^{-\epsilon})$$

de esta manera si

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x-a| < a\cdot(1-e^{-\epsilon}) \Rightarrow a\cdot(e^{-\epsilon}-1) < x-a < a\cdot(1-e^{-\epsilon}) < a\cdot(e^{\epsilon}-1)$$

$$\Rightarrow a\cdot(e^{-\epsilon}-1) < x-a < a\cdot(e^{\epsilon}-1) \Rightarrow e^{-\epsilon}-1 < \frac{x-a}{a} < e^{\epsilon}-1 \Rightarrow e^{-\epsilon} < 1+\frac{x-a}{a} < e^{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \epsilon < \ln\left(\frac{x}{a}\right) < \epsilon \Rightarrow \left|\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right| < \epsilon \Rightarrow |\ln(x)-\ln(a)| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a$$

es decir $f(x) = \ln x$ es continua en a. □

Operaciones con funciones continuas

Teorema 1. *Sean f y g funciones continuas en x_0. Entonces $f+g$, $f-g$, $\frac{1}{g}$ y $\frac{f}{g}$ son continuas en x_0 excepto que la continuidad no existe para $\frac{1}{g}$ y $\frac{f}{g}$ si $g(x_0)=0$*

Demostración. Como f y g funciones continuas en x_0 se tiene

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad y \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

por lo que

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} (f - g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) - g(x_0) = (f - g)(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

□

Teorema 2. *Si g es continua en x_0, f continua en $g(x_0)$ $\Rightarrow$ fog es continua en x_0.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ como f es continua en $g(x_0)$, para este ε $\exists$ $\delta' > 0$ tal que

$|y - g(x_0)| < \delta'$ $\Rightarrow$ $|f(y) - f(g(x_0))| < \varepsilon$..(1)

y como g es continua en x_0 para δ' $\exists$ $\delta > 0$ tal que si

$0 < |x - x_0 < \delta$ $\Rightarrow$ $|g(x) - g(x_0) < \delta'$...(2)

$\therefore$ Si $0 < |x - x_0|\delta$ $\Rightarrow$ $|g(x) - g(x_0)| < \delta'$ $\Rightarrow$ $|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$

La primera implicación por (1) y la segunda por (2)

$\therefore$ fog es continua en x_0. □

Ejercicio Pruebe que si $\lim_{x \to a} g(x) = y_0$ y f es continua en y_0 entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(y_0) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Demostración. Definimos

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \neq a \\ y_0 & si \quad x = a \end{cases}$$

se tiene entonces

$$\lim_{x \to a} G(x) = \lim_{x \to a} g(x) = y_0 = G(a)$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to a} G(x) = G(a)$$

por lo tanto G es continua en a.
Y como f es continua en $y_0 = G(a)$ entonces

$$\lim_{x \to a} f \circ G(x) = f \circ G(a)$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to a} f\circ g(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{x\to a} f(G(x)) = f(G(a)) = f(y_0) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

$\square$

Ejercicio Demostrar que si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ y g es continua en y_0 entonces

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$$

Demostración. g continua en y_0 quiere decir

$$\forall\ \epsilon > 0 \exists\ \delta > 0,\ \ tal\ \ que\ \ |y - y_0| < \delta\ \Rightarrow\ |g(y) - g(y_0)| < \epsilon \qquad (1)$$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ quiere decir

$$\forall\ \epsilon > 0 \exists\ N > 0,\quad \Rightarrow\ |f(x) - y_0| < \epsilon$$

en esta última desigualdad consideramos $\epsilon = \delta$ por lo que

$$N > 0,\quad \Rightarrow\ |f(x) - y_0| < \delta\ \underbrace{\Rightarrow}_{(1)}\ |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$$

$\square$

Ejercicio Demostrar que

$$\lim_{x\to a} x^r = a^r \quad r\in\mathbb{R} \quad x > 0$$

Demostración. Para esto podemos escribir

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r\ln(x)}$$

por lo que se tiene

$$\lim_{x\to a} x^r = \lim_{x\to a} e^{r\ln(x)} \underbrace{=}_{e\ \ es\ \ continua} e^{\lim_{x\to a} r\ln(x)} \underbrace{=}_{\ln\ es\ continua} e^{r\ln(\lim_{x\to a} x)} = e^{r\ln(a)} = e^{\ln(a^r)} = a^r$$

$\square$