Continuidad parte 3

Definición 1. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función definida en el intervalo cerrado* $[a,b]$*, decimos que* f *es continua en* $[a,b]$ *si*

$$(a) \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

$$(b) \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

$$(c) \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \forall\ x_0 \in (a,b)$$

Teorema 1. *Teorema Conservación de signo Supongase que* f *es continua en* x_0 *y* $f(x_0) \neq 0$ *entonces*

$$\exists \quad \delta > 0 \quad tal \quad que \quad |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \neq \ 0$$

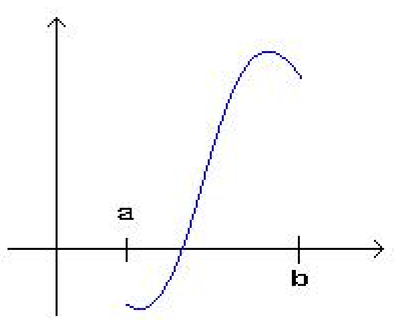
Demostración. Suponemos que $f(x_0) > 0$

$\therefore \quad \forall \quad \varepsilon > 0, \quad \exists \quad \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ en particular para $\varepsilon_0 = f(x_0) > 0 \ \ \exists \quad \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0 < \delta_0$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$ es decir $-f(x_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0) \qquad \Rightarrow \qquad 0 < f(x)$ □

Teorema de Bolzano

Lema 1. *Teorema de Bolzano Sea* f *continua sobre* $[a,b]$ *y* $f(a) < 0 < f(b) \qquad \Rightarrow \qquad \exists \ \ x \in [a,b]$ *tal que* $f(x) = 0$

Demostración. Definimos $A = \{x \in [a,b] \mid f \ \text{ es negativa en } \ [a,x]\}$



1) $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$ ya que $f(a) < 0$ y $a \in [a,b]$
2) b es cota superior de A ya que $\forall \ \ y \in A \ \ b \geq y$

$\therefore \quad A$ tiene una cota superior mínima x_0 con $a \leq x_0 \leq b$

Vamos a comprobar que $f(x) = 0$ eliminando las posibilidades $f(x_0) < 0 \quad$ y $\quad f(x_0) > 0$

Caso $f(x_0) > 0$

Según el teorema de conservación del signo si f es continua en x_0 y $f(x_0) > 0$ entonces $\exists \ \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$

$\exists \ \delta > 0$ tal que $x \in [a, b] \bigcap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$, como $x_0 = sup \ A$

$\exists \ x_1 \in A$ tal que $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0]$ esto significa que f es negativa en $[a, x_1]$ <u>CONTRADICCIÓN</u>

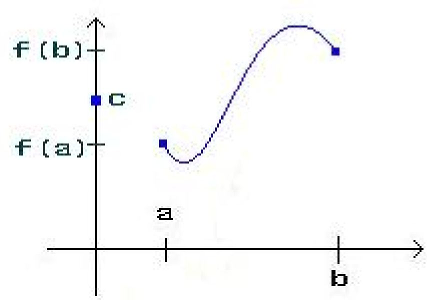
Pues $f(x_1) > 0$ y por lo tanto $f(x_{0)} > 0$ no se cumple.

Un razonamiento similar muestra que $f(x_0) < 0$ no ocurre, y por lo tanto $f(x_0) = 0$ □

Teorema del Valor Intermedio

Lema 2. *Sea f continua sobre $[a, b]$ y c entre $f(a)$ y $f(b)$ $\Rightarrow$ $\exists$ $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$*

Demostración. Caso $f(a) < c < f(b)$



Sea $g(x) = f(x) - c$ tenemos que g es continua pues es la diferencia de funciones continuas $g(a) = f(a) - c < 0$ pues $f(a) < c$ por hip. y $g(b) = f(b) - c > 0$ pues $f(b) > c$ por hip.

$\therefore \quad g(a) < 0 < g(b)$

Según el lema $\exists \ x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = f(x_0) - c = 0$ y por lo tanto $f(x_0) = c$ □

Ejemplo Probrar lo siguiente: Si n es un entero positivo y si $x_0 > 0$, existe un número positivo x y solo uno tal que $x^n = x_0$

Solución Sea $c > 1$ y tal que $0 < x_0 < c$ y consideremos $f(x) = x^n$ la cual es continua en $[0, c]$ y además

$$f(0) = 0^n = 0, \quad y \quad f(c) = c^n \quad puesto \ \ que \quad 0 < x_0 < c < c^n$$

se tiene que $x_0 \in (0, c)$ por lo tanto según el teorema del valor intermedio

$$\exists\, x \in (0, c) \;\; tal \;\; que \;\; f(x) = x_0 \;\; es \;\; decir \;\; x^n = x_0$$

No puede haber otro pues $f(x) = x^n$ es creciente sobre $[0, c]$

Una función continua en un intervalo cerrado es acotada

Lema 3. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *continua en* $a \quad \Rightarrow \quad \exists\;\; \delta > 0$ *tal que* f *esta acotada superiormente en* $[a, a + \delta)$

Demostración. Como f es continua en a, tenemos que para $\varepsilon > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta \;\Rightarrow\; |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Tomando $\epsilon = 1$ se tiene

$$|f(x) - f(a)| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < f(x) - f(a) < 1$$
$$\Rightarrow\; -1 - f(a) < f(x) < 1 + f(a)$$

por lo que en el intervalo $[a, a + \delta)$ la función f está acotada superiormente. □

Lema 4. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *continua en* $a \quad \Rightarrow \quad \exists\;\; \delta > 0$ *tal que* f *esta acotada inferiormente en* $[a, a + \delta)$

Lema 5. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *continua en* $b \quad \Rightarrow \quad \exists\;\; \delta > 0$ *tal que* f *esta acotada superiormente en* $(b - \delta, b]$

Demostración. Como f es continua en b, tenemos que para $\varepsilon = 1 > 0 \;\; \exists \;\; \delta > 0$ tal que

$$x \in \;\; (b - \delta, b]) \;\Rightarrow\; |x - b| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(b)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow\; |f(x) - f(b)| < 1 \;\Rightarrow\; -1 < |f(x) - f(b)| < 1$$
$$-1 - f(b) < f(x) < f(b) + 1$$

por lo que f esta acotada superiormente en $(b - \delta, b]$ □

Lema 6. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f *continua en* $b \quad \Rightarrow \quad \exists\;\; \delta > 0$ *tal que* f *esta acotada inferiormente en* $(b - \delta, b]$

Teorema 2. f *continua sobre* $[a, b] \quad \Rightarrow \quad f$ *esta acotada en* $[a, b]$

Demostración. Caso 1.- Acotada superiormente

Sea $A = \{x \in [a, b] \mid f \;\;$ esta acotada superiormente en $[a, x]\}$, $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$ ya que f esta acotada superiormente en $[a, a] = a$

A esta acotado superiormente por b pues $A \subset [a, b]$ y $\forall\; x \in A \;\; x \leq b$

$\therefore$ Según el axioma del supremo, A tiene una mínima cota superior, sea $\alpha = sup\; A$

Veremos que $a = \alpha$ es falso

Como f es continua en $a \quad \Rightarrow \quad \exists\ \delta > 0$ tal que f esta acotada superiormente en $[a, a+\delta) \subset [a,b]$ y por lo tanto $a < a + \dfrac{\delta}{2} \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad a < \alpha$.

Supongamos que $a < \alpha < b \quad \Rightarrow \quad \exists\ \delta > 0$ tal que f esta acotada superiormente en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset [a,b]$ es decir $\exists\ M_2$ tal que $f(x) \leq M_2 \quad \forall\ x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ y como $\alpha = sup\ A$ entonces $\exists\ x_0 \in A$ tal que $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$ entonces f esta acotada superiormente en $[a, x_0]$ es decir $\exists\ M_1$ tal que $f(x) \leq M_1\ \forall\ x \in [a, x_0]$

Sea $M = max\ \{M_1, M_2\}$, tenemos entonces
$f(x) \leq M \quad \forall\ x \in [a, x_0] \bigcup (\alpha - \delta, \alpha + \dfrac{\delta}{2}) = [a, \alpha + \dfrac{\delta}{2}]$

$\therefore \quad \alpha + \dfrac{\delta}{2} \in A \quad \Rightarrow \quad \alpha + \dfrac{\delta}{2} \leq \alpha$ <u>CONTRADICCIÓN</u>

$\therefore \quad \alpha = b$

Y como f es continua en b entonces $\exists\ \delta > 0$ tal que f esta acotada superiormente en $(b - \delta_0, b]$ es decir $\exists\ N_1$ tal que $\forall\ x \in (b - \delta_0, b],\quad f(x) \leq N_1$ por otro lado $b = sup\ A$ entonces $\exists\ x_1 \in A$ tal que $x_1 \in (b - \delta_0, b]$ y como $x_1 \in A$, entonces f esta acotada en $[a, x_1]$

$\therefore \quad \exists\ N_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq N_2 \quad \forall\ x \in [a, x_1]$. Sea $N = max\ \{N_1, N_2\}$ se tiene entonces que $f(x) \leq N\ \ \forall x \in [a, x_1]$ y $f(x) \leq N\ \ \forall x \in [b - \delta_0, b]$ y por lo tanto $f(x) \leq N\ \ \forall x \in [a, x_1] \bigcup (b - \delta_0, b] = [a,b]$

$\therefore \quad f$ esta acotada superiormente en $[a,b]$ □

Corolario 1. *f continua sobre $[a,b] \quad \Rightarrow \quad f$ esta acotada inferiormente en $[a,b]$*

Demostración. La función $-f$ es continua en $[a,b]$ según el resultado anterior $\exists M$ tal que $-f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ por tanto $f(x) \geq -M$ $\forall x \in [a,b]$ y f esta acotada inferiormente por $-M$ □