Continuidad parte 4

Lema 1. ***Teorema de Bolzano*** *Sea f continua sobre $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ $\Rightarrow$ $\exists$ $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$*

Ejemplo Pruebe que todo número real estrictamente positivo tiene raíz n-ésima, esto es, si $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$, $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tal que $t^n = a$

Solución Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n - a$ la cual es continua en $\mathbb{R}$

Caso 1: $0 < a < 1$
Tenemos que $f(0) = 0^n - a = -a < 0$ $\quad$ $f(1) = 1^n - a = 1 - a > 0$
Según el teorema del valor intermedio (Bolzano) $\exists\, t \in [0,1]$ tal que $f(t) = 0$ esto es $f(t) = t^n - a = 0 \quad \Rightarrow \quad t^n - a = 0 \quad \Rightarrow \quad t^n = a$

Caso 2: $a > 1$
$f(0) = 0^n - a = -a < 0$ y $f(a) = a^n - a = a(a^{n-1} - 1) > 0$
$\therefore$ $\exists\, t \in [0,a]$ tal que $f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^n = a$

Ejemplo Pruebe que todo número real estrictamente negativo tiene raíz n-ésima(impar), esto es, si $a \in \mathbb{R}$ $a > 0$, $\exists\, t \in \mathbb{R}$ tal que $t^n = a$

Solución Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n - a$ la cual es continua en $\mathbb{R}$

Caso 1: $-1 < a < 0$
Tenemos que $f(0) = 0^n - a = -a > 0$ $\quad$ $f(1) = 1^n - a = 1 - a < 0$
Según el teorema del valor intermedio (Bolzano) $\exists\, t \in [0,1]$ tal que $f(t) = 0$ esto es $f(t) = t^n - a = 0 \quad \Rightarrow \quad t^n - a = 0 \quad \Rightarrow \quad t^n = a$

Caso 2: $a < -1$
$f(0) = 0^n - a = -a > 0$ y $f(a) = a^n - a = a(a^{n-1} - 1) < 0$
$\therefore$ $\exists\, t \in [0,a]$ tal que $f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^n = a$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y periodica con periodo $T > 0$. Probar que existe x_0 tal que

$$f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0)$$

Solución Consideremos la función

$$g(x) = f\left(x + \frac{T}{2}\right) - f(x)$$

la cual es continua pues f es continua y además

$$g(0) = f\left(0 + \frac{T}{2}\right) - f(0) = f\left(\frac{T}{2}\right) - f(0)$$

$$g\left(\frac{T}{2}\right) = f\left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right) - f\left(\frac{T}{2}\right) = f(T) - f\left(\frac{T}{2}\right) = f(0) - f\left(\frac{T}{2}\right)$$

por lo tanto $g(0)$ y $g\left(\frac{T}{2}\right)$ tienen signos contrarios, por lo tanto según el teorema de Bolzano,

$$\exists\ x_0 \in \left(0, \frac{T}{2}\right), \quad tal \quad que \quad f(x_0) = 0 \ \Rightarrow\ f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0)$$

Ejemplo Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que dada $x_1, x_2, ..., x_n \in (a,b)$ existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f(x_0) = \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_n)\right]$$

Solución Definimos

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_n)\right]$$

la cual es continua pues f es continua y además

$$g(a) = f(a) - \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_n)\right] < 0$$

$$g(b) = f(b) - \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_n)\right] > 0$$

por lo tanto según el teorema de Bolzano existe $x_0 \in (a,b)$ tal que

$$g(x_0) = 0, \quad es \quad decir \quad f(x_0) - \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_n)\right] = 0$$

Ejemplo Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua que satisface

$$\frac{1}{b} \leq f(x) \leq \frac{1}{a} \quad \forall\ x \in [a,b]$$

Demustre que existe $x \in [a,b]$ tal que

$$xf(x) = 1$$

Solución Tenemos que

$$xf(x) = 1 \quad equivale \ a \ f(x) = \frac{1}{x}$$

por lo que definimos la función

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{x}$$

la cual es continua $\forall\ x \in [a,b]$ y además

$$g(a) = f(a) - \frac{1}{a} \leq 0 \quad y \quad g(b) = f(b) - \frac{1}{b} \geq 0$$

por lo que según el teorema de Bolzano existe $x_0 \in [a,b]$ tal que

$$g(x_0) = 0 \quad es \quad decir \quad f(x_0) - \frac{1}{x_0} = 0 \quad es \quad decir \quad x_0 f(x_0) = 1$$

Una función Continua en un intervalo cerrado alcanza su valor máximo y mínimo

Teorema 1. *f continua sobre $[a,b]$ $\Rightarrow$ existen x_1, $x_2 \in [a,b]$ tales que $f(x_1) \leq x \leq f(x_2)$ $\forall\ x \in [a,b]$*

Demostración. Caso 1) f continua sobre $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\exists\ x_2$ tal que $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall$ $x \in [a,b]$

Sea $A = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, como f es continua sobre $[a,b]$ $\exists\ M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ $\forall\ x \in [a,b]$ y por lo tanto A esta acotado superiormente.

$A \neq \emptyset$ pues $a \in [a,b]$ y $f(a) \leq M$, y por lo tanto $f(a) \in A$

Según la propiedad del supremo A tiene una mínima cota superior, sea $\alpha = sup\ A$. Mostraremos que $f(x_2) = \alpha$ supondremos $f(x) \neq \alpha$ $\forall\ x \in [a,b]$ entonces $\alpha - f(x) > 0$ $\forall\ x \in [a,b]$. Sea $g(x) = \dfrac{1}{\alpha - f(x)}$ $x \in [a,b]$

Como g es continua entonces g esta acotada superiormente en $[a,b]$ es decir $\exists\ N \in \mathbb{R}, N > 0$ tal que $g(x) \leq N$ $\forall\ x \in [a,b]$

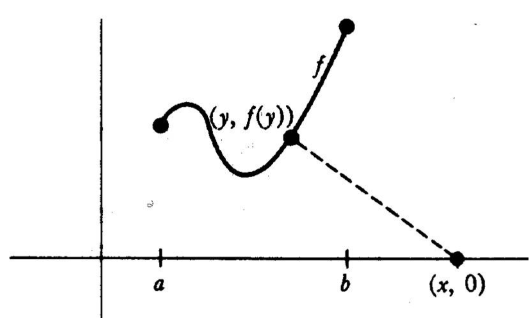
$\therefore$ $\dfrac{1}{\alpha - f(x)} \leq N$ $\forall\ x \in [a,b]$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{N} \leq \alpha - f(x)$ y por lo tanto $f(x) \leq \alpha - \dfrac{1}{N}$ $\forall\ x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ $\alpha - \dfrac{1}{N}$ es cota superior de A y $\alpha - \dfrac{1}{N} < \alpha$ CONTRADICCIÓN

$\therefore$ $\exists\ x_2 \in [a,b]$ tal que $f(x_2) = \alpha$ y por lo tanto $f(x) \leq f(x_2)$ $\forall\ x \in [a,b]$

Análogamente f continua sobre $[a,b]$ $\Rightarrow$ Existe x_1 tal que $f(x_1) \leq f(x)$ $\forall\ x \in [a,b]$ □

Ejemplo Supóngase que f es continua en $[a,b]$ y sea x un número cualquiera. Demostrar que existe un punto en la gráfica de f que es, entre todos el más proximo a $(x,0)$



Demostración. Sea $d(z) = \sqrt{(z-x)^2 + (f(z))^2}$, la distancia de un punto $(z, f(z))$ sobre la gráfica de la función al punto $(x,0)$ tenemos que d es continua $\therefore$ $\exists\ z_1 \in [a,b]$ tal que $d(z_1) \leq d(z)$ $\forall z \in [a,b]$ □