Continuidad parte 5

Corolario 1. *Sea una función $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[a,b]$ se cumple entonces que el conjunto $f([a,b])$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$*

Demostración. Sea $M = max\ \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, $m = min\ \{f(x) \mid x \in [a,b]$, entonces cualesquiera que sea x tal que $a \leq x \leq b$ se cumple que $m \leq f(x) \leq M$ con lo que $f([a,b]) \subset [m,M]$

Por otro lado, si $c \in [m,M]\ \exists\ x \in [a,b]$ tal que $f(x) = c \quad \Rightarrow \quad [m,M] \subset f([a,b]) \quad \therefore \ f([a,b]) = [m,M]$ que es un intervalo cerrado y acotado. □

Ejemplo Supongase que f es una función continua con $f(x) > 0\ \ \forall\ x$ y

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Demostrar que existe algún número y tal que $f(y) \geq f(x)\ \ \forall\ x$

Demostración. Como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

se tiene que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ N > 0,\ \ tal\ \ que\ \ x > N\ \ \Rightarrow\ |f(x) - 0| < \epsilon\ \Rightarrow\ f(x) < \epsilon$$

Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

se tiene que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ M > 0,\ \ tal\ \ que\ \ x < -N\ \ \Rightarrow\ |f(x) - 0| < \epsilon\ \Rightarrow\ f(x) < \epsilon$$

lo anterior nos dice que

$$f(x) < \epsilon,\ \ \forall\ x \in (-infty, -N) \quad y \quad f(x) < \epsilon,\ \ \forall\ x \in (M, +\infty)$$

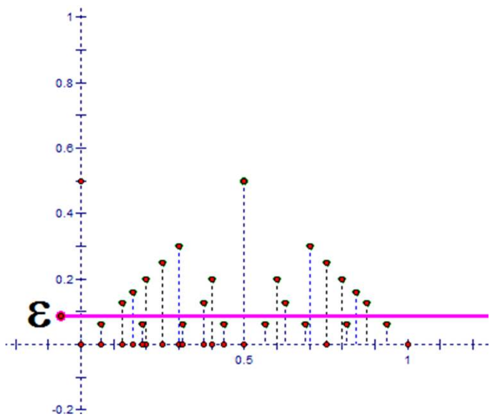
Solo falta ver que ocurre en $[-N, M]$, pero al ser intervalo cerrado sabemos que existe $y \in [-N, M]$ tal que

$$f(y) \geq f(x)\ \ \forall\ x \in [-N, M]$$

y como $f(y) > 0$ podemos tomar este mismo valor para $x \in (-\infty, -N)$ y $x \in (M. + \infty)$ es decir $f(y) \geq f(x),\ \ \forall\ x$ □

Vamos a ver un ejemplo de una función que pareciera ser discontinua, pero en realidad si es continua en ciertos puntos

Considere ahora la función $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad\quad\quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & si \quad x = \frac{p}{q} \quad fracción \quad irreducible \end{cases}$



Esta función tiene límite en $x \in \mathbb{I}$ porque si $a \in \mathbb{I}$ y tomo $\epsilon = \frac{1}{N}$

Defino $A_\epsilon = \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1] \left| \frac{1}{q} \geq \epsilon \right.\}$ se tiene que A_ϵ es un conjunto finito, por otro lado defino $\delta = min\{\left|a - \frac{p}{q}\right| \quad | \quad \frac{p}{q} \in A_\epsilon, \quad a \neq \frac{p}{q}\}$

Por un lado

Si $x \notin \mathbb{Q}$ entonces se tiene $0 < |x - a| < \delta$ implica $|0 - 0| = 0 < \epsilon$

Por otro lado

si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $0 < |x - a| < \delta$ implica que $\left|\frac{1}{q}\right| = \frac{1}{q} < \epsilon \therefore \forall x$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ y f es continua en los irracionales

Continuidad Uniforme

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que f es uniformemente continua en A si, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario $\exists\ \delta > 0$ tal que cualquiera que sean $x, y \in A$ que cumplan $|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Ejemplo: Considere la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$

P.D. $\quad \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \ \delta > 0$ tal que si $x, y \in [0, 1]$ cumplen $|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Tenemos que $|f(x) - f(y)| = |3x - 3y| = 3|x - y| < 3\delta$, propongo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$

Si $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ entonces $|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x-y| < \dfrac{\varepsilon}{3} \quad \Rightarrow \quad 3|x-y| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |3x-3y| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

$\therefore\ \ f(x) = 3x$ es uniformemente continua en $[0, 1]$

Ejemplo: Verificar que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua en $[0, \infty)$

Solución: Tenemos que probar que $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
Tenemos entonces $|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} < \delta$, propongo $\delta = \varepsilon^2$

Si $|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x - y| < \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{|x - y|} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$\therefore$ Es uniformemente continua en $[0, \infty)$

Vamos a comprobar la desigualdad usada en la solución $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$

Tenemos que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{(x - y)} \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |x - y| \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq |x - y|$
$\Rightarrow \quad x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - y$

Caso $x - y > 0$

$\Rightarrow \quad x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq x - y \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq -y \quad \Rightarrow \quad 2y \leq 2\sqrt{x}\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad y \leq \sqrt{x}\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad y^2 \leq xy$
lo cual es cierto pues $x - y > 0 \quad \Rightarrow \quad x > y \quad \Rightarrow \quad xy > y^2$

El caso $x - y < 0$ es análogo.

Teorema 1. *Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$*

Demostración. Propiedad ϵ^*. Diremos que dada $\epsilon > 0$, f tiene la propiedad ϵ^* en $[a, b]$ si existe algún $\delta > 0$ tal que $\forall y, z \in [a, b]$

$$si \quad |y - z| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(z)| < \epsilon$$

La prueba consiste en mostrar que f tiene la propiedad ϵ^* en $[a,b]$ $\forall \epsilon > 0$
Para ello consideremos un $\epsilon > 0$ cualquiera. Sea

$$A = \{x \mid a \leq x \leq b \quad y \quad f \quad tiene \quad la \quad propiedad \quad \epsilon^* \quad en \quad [a,x]\}$$

1) se tiene que $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$
2) A esta acotado superiormente por b
de lo anterior se tiene que A tiene una mínima cota superior a la cual llamamos $\alpha = \sup A$ y vamos a mostrar que $\alpha = b$ $\forall \epsilon > 0$
Supóngamos que $\alpha < b$. Al ser f continua en α existe $\delta_0 > 0$ tal que si $|y-\alpha| < \delta_0$ entonces $|f(y)-f(\alpha)| < \frac{\epsilon}{2}$ y por tanto si $|y-\alpha| < \delta_0$ y $|z-\alpha| < \delta_0$ entonces $|f(y)-f(z)| = |f(y)-\alpha+\alpha-f(z)| \leq |f(y)-f(\alpha)| + |\alpha - f(z)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por tanto f tiene la propiedad ϵ^* en el intervalo $\alpha - \delta_0, \alpha + \delta_0$, con lo que $\alpha + \delta \in A$ en contradiccion pues $\alpha = \sup A$. Solo falta ver que $\alpha \in A$. Para tenemos que al ser f continua en b, $\exists$ $\delta_0 > 0$ tal que si $|b-y| < \delta_0$, entonces $|f(y)-f(b)| < \frac{\epsilon}{2}$. Por tanto f tiene la propiedad ϵ^* en $[b-\delta_0, b]$ y f tiene la propiedad ϵ^* en $[\alpha, b-\delta_0]$ por tanto tiene la propiedad ϵ^* en $[a,b]$ $\square$

Determinar cuales de las siguientes funciones son uniformemente continuas
a) $f(x) = \ln(x)$ para $x \in (0,1)$
b) $f(x) = x\operatorname{sen}(x)$ para $x \in [0,\infty)$
c) $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \in [0,\infty)$
d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ para $x \in (-\infty,\infty)$
e) $f(x) = e^x$ para $x \in [0,\infty)$
Para a) definimos $x_n = e^{-n}$ y $y_n = e^{-(n+1)}$ y de esta manera

$$|x_n - y_n| = |e^{-n} - e^{-(n+1)}| = \left|\frac{1}{e^n} - \frac{1}{e^{n+1}}\right| = \left|\frac{e-1}{e^n e}\right| < \left|\frac{e}{e^n e}\right| = \left|\frac{1}{e^n}\right| < \frac{1}{n}$$

pero

$$\left|f(e^{-n}) - f(e^{-(n+1)})\right| = \left|\ln(e^{-n}) - \ln(e^{-(n+1)})\right| = |-n+n+1| = 1$$

por tanto f no es uniformemente continua. Para b) definimos $x_n = 2n\pi$ y $y_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$ y de esta manera

$$|x_n - y_n| = |2n\pi - (2n\pi + \frac{1}{n})| = \left|-\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

pero

$$\left|f(2n\pi) - f(2n\pi + \frac{1}{n})\right| = \left|2n\pi\operatorname{sen}(2n\pi) - (2n\pi + \frac{1}{n})\operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right)\right| = |2\pi| = 1$$

por tanto f no es uniformemente continua. Para c) consideramos lo siguiente:

$$|f(x) - f(c)| = |\sqrt{x} - \sqrt{c}| \leq \sqrt{|x-c|} \qquad x, c \in [0,\infty)$$

por lo que dada $\epsilon > 0$ elegimos $\delta = \epsilon^2$ de esta manera $|x-c| < \delta$ implicara $|\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \epsilon$
Para d) Dado que f es continua en $[-1,1]$ y f es par, entonces bastara con probar que f es uniformemente continua en $[1,\infty$
tenemos que

$$|f(x)-f(c)| = \left|\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{c^2+1}\right| = \frac{|c^2-x^2|}{(x^2+1)(c^2+1)} = \frac{x^2-c^2}{(x^2+1)(c^2+1)} = \frac{(x+c)(x-c)}{(x^2+1)(c^2+1)} \underbrace{<}_{x+c<(x^2+1)(c^2+1)} \leq |x-c|$$

por tanto f es Lipchitz y por tanto f es uniformemente continua. Para e) definimos $x_n = \ln(n)\pi$ y $y_n = \ln(n+1)$ y de esta manera

$$|x_n - y_n| = |\ln(n) - \ln(n+1)| = \left|\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right| \leq \frac{1}{n}$$

pero

$$|f(\ln(n)) - f(\ln(n+1))| = \left|e^{\ln(n)} - e^{\ln(n+1)}\right| = |n - n - 1| = 1$$

por tanto f no es uniformemente continua.
Mostrar que si f es una función continua y periodica en $\mathbb{R}$ entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$

Demostración. Sea $T > 0$ el periodo de f, y sea $\epsilon > 0$ entonces $\exists \ \ \delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Si tomamos $\delta < T$ sea $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $|x - y| < \delta$ entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$nT < x < (n+1)T \quad y \quad (n-1)T < y < (n+2)T \Rightarrow x \in [0, T] \quad y \quad y \in [-T, 2T]$$

por lo tanto

$$|(x - nT) - (y - nT)| = |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x - nT) - f(y - nT)| = |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$\square$