Conjuntos Densos

Definición 1. *Se dice que un subconjunto S de un campo ordenado F es denso si:*

$$\forall\ a, b \in\ F,\ \ \exists\ x \in\ S \quad tal \quad que \quad a < x < b$$

Teorema 1. *(Densidad de los Números Racionales $\mathbb{Q}$ en F) Los números racionales forman un subconjunto denso en un campo ordenado arquimediano F*

Demostración. Suponga que F es un campo ordenado arquimediano y dados $a, b \in F$ con $a < b$ se tiene que
(a) $b - a > 0$
(b) $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < b - a \ \Rightarrow\ 1 < (b-a)n \ \Rightarrow\ 1 < bn - an$$

segíun el resultado anterior $\exists\ m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$na < m < nb \ \Rightarrow\ a < \frac{m}{n} < b$$

por lo tanto los números racionales forman un subconjunto denso en un campo ordenado F □

Teorema 2. *En un campo ordenado arquimediano, los números irracionales forman un subconjunto denso de F*

Demostración. Sean $x, y \in F$ tal que $x < y$ aplicando los reultados antariores tenemos que existen racionales $r, s \in F$ tales que

$$x < r < s < y$$

si por otro lado consideremos el número

$$r + \frac{s-r}{\sqrt{2}}$$

se tiene entonces que este número es irracional por ser el producto y la suma de un número racional con un número irracional
También

$$r < r + \frac{s-r}{\sqrt{2}}$$

y como

$$\frac{s-r}{\sqrt{2}} < s - r \ \Rightarrow\ r + \frac{s-r}{\sqrt{2}} < s$$

por lo tanto dados $x, y \in F$ existe un número irracional z, tal que $x < z < y$ □

Teorema 3. *Si S es un subconjunto denso de un campo ordenado F, entonces entre cualesquiera dos elementos de F existe una infinidad de elementos de S.*

Demostración. Sean $a, b \in F$ tal que $a < b$ al ser S denso se tiene que existe $x \in S$ tal que

$$a < x < b$$

si $x \in S$ entonces $x \in F$ y podemos aplicar lo anterior de tal manera que existe $x_1 \in S$ tal que

$$a < x_1 < x < b$$

si $x_1 \in S$ entonces $x_1 \in F$ y podemos aplicar lo anterior de tal manera que existe $x_2 \in S$ tal que

$$a < x_2 < x_1 < x < b$$

continuamos este proceso tantas veces como queramos.
De esta manera encontraremos una infinidad de elementos de S entre a y b □

Propiedad de Completez

Definición 2. *(1) Si A es un subconjunto de un campo ordenado F y $u \in F$, se dice que es una cota superior de A si,*

$$\forall\ x \in A \quad se \quad cumple \quad x \leq u$$

(2) Análogamente, Si A es un subconjunto de un campo ordenado F y $u \in F$, se dice que es una cota inferior de A si,

$$\forall\ x \in A \quad se \quad cumple \quad x \geq u$$

(3) Si A es un subconjunto de un campo ordenado F y $u \in F$, se dice que u es un máximo de A si,

$$u \in A, \quad y \quad \forall\ x \in A \quad se \quad cumple \quad x \leq u$$

(4) Si A es un subconjunto de un campo ordenado F y $u \in F$, se dice que u es un mínimo de A si,

$$u \in A, \quad y \quad \forall\ x \in A \quad se \quad cumple \quad x \geq u$$

Un subconjunto A de un campo ordenado F se denomina acotado superiormente (respectivamente acotado inferiormente), si A tiene alguna cota superior (respectivamente inferior). Se dice que A es acotado si lo es superior e inferiormente.

Ejemplo El conjunto $R_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x\}$ No esta acotado superiormente ya que no existe ningún número real β tal que $x \leq \beta \ \ \forall x \in R_0^+$. No obstante dicho conjunto esta acotado inferiormente pues todo número real negativo α es cota inferior de R_0^+ ya que se cumple $\alpha < 0 < x \ \ \forall x \in R_0^+$.

Ejemplo $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ Tiene cota inferior $= 0$, tiene cota superior $= 1$
Tiene $max = 1$, No tiene min

Ejemplo $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \ \ y \ \ n \neq 0\right\}$ Tiene cota inferior $= -1$, tiene cota superior$= 1$
Tiene $max = 1$, tiene $min = -1$

Ejemplo $\left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ Tiene cota superior$= \dfrac{3}{2}$, tiene cota inferior$= -1$
Tiene $max = \dfrac{3}{2}$, no tiene min