Propiedad de Completez (Parte 2)

Definición 1. *(1) Si A es un subconjunto de un campo ordenado F y $u \in F$, se dice que es una cota superior de A si,*

$$\forall\ x \in A \quad se \quad cumple \quad x \leq u$$

(2) Análogamente, Si A es un subconjunto de un campo ordenado F y $u \in F$, se dice que es una cota inferior de A si,

$$\forall\ x \in A \quad se \quad cumple \quad x \geq u$$

(3) Si A es un subconjunto de un campo ordenado F y $u \in F$, se dice que u es un máximo de A si,

$$u \in A, \quad y \quad \forall\ x \in A \quad se \quad cumple \quad x \leq u$$

(4) Si A es un subconjunto de un campo ordenado F y $u \in F$, se dice que u es un mínimo de A si,

$$u \in A, \quad y \quad \forall\ x \in A \quad se \quad cumple \quad x \geq u$$

Proposición 1. *Todo subconjunto no vacio y finito de un campo ordenado F, tiene un elemento máximo*

Demostración. Sea $S \subset F$, $S \neq \emptyset$ y S finito. Esto es existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Para demostrar que S tiene un elemento máximo procedemos por induccion sobre el número de elementos de S.
Para un conjunto con un solo elemento se tiene $S = \{x_1\}$, en este conjunto S se tiene $x_1 \leq x_1$ por tanto $\forall\ x \in\ S$, $x \leq x_1$ por lo tanto $x_1 = \max\ S$
Supongamos que un conjunto

$$S = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$$

tiene un elemento máximo y lo llamamos $u = \max S$
Vamos a comprobar que el conjunto

$$S = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \bigcup \{x_{k+1}\}$$

tiene un elemento máximo.
Considemos el $v = \max\{u, x_{k+1}\}$ en este caso $v \in\ S$ y ademas $\forall\ x \in\ S,\ x \leq v$
Por lo tanto

$$S = \{x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}\}$$

tiene un elemento máximo. □

Definición 2. *Sea F un campo ordenado.*
(a) $\forall\ a, b \in F$ definimos un intervalo como el conjunto

$$[a, b] = \{x \in F \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(b) \quad (a, b) = \{x \in F \mid a < x < b\}$$

$$(c) \quad (a,b] = \{x \in F \mid a < x \leq b\}$$
$$(d) \quad [a,b) = \{x \in F \mid a \leq x < b\}$$
$$(e) \quad (-\infty,b) = \{x \in F \mid x < b\}$$
$$(f) \quad (-\infty,b] = \{x \in F \mid x \leq b\}$$
$$(g) \quad (a,+\infty) = \{x \in F \mid a < x\}$$
$$(h) \quad [a,+\infty) = \{x \in F \mid a \leq x\}$$
$$(i) \quad (-\infty,+\infty) = F$$

Axioma del Supremo

Definición 3. *Suponga que F es un campo ordenado y $A \subset F$. Decimos que un elemento $u \in F$ es (1) Mínima cota superior (supremo) de A, si u es una cota superior de A y para toda cota superior v de A se tiene $u \leq v$. Lo denotamos*

$$\sup\ A$$

(2) Máxima cota inferior (infimo) de A, si u es una cota inferior de A y para toda cota inferior v de A se tiene $v \leq u$. Lo denotamo

$$\text{ínf}\ A$$

Axioma del Supremo Si F es un campo ordenado y $A \subset F$ es no vacío y acotado superiormente, entonces existe *sup* A.

Ejemplo Sean $a, b \in\ F$ donde F es un campo ordenado entonces $\text{ínf}(a,b) = a$

Demostración. En este caso tenemos que a es cota inferior de (a,b).
Suponemos que v es cota inferior de (a,b), entonces debe ocurrir que $v \leq a$.
Para demostrar que esto sucede, vamos a suponer que ocurre lo contrario, es decir $v > a$.
Por un lado se tiene que $\frac{a+b}{2} \in (a,b)$ y además

$$a < v \leq \frac{a+b}{2} < b$$

Por otro lado consideramos $c = \frac{a+v}{2}$ y se tiene que

$$a < c < v \leq \frac{a+b}{2} < b$$

por lo que $c \in (a,b)$ y $c < v$ lo cual es falso pues v es cota inferior de (a,b), por lo tanto $v \leq a$ □

Ejemplo Hallar el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de A para $A = (-1,3]$

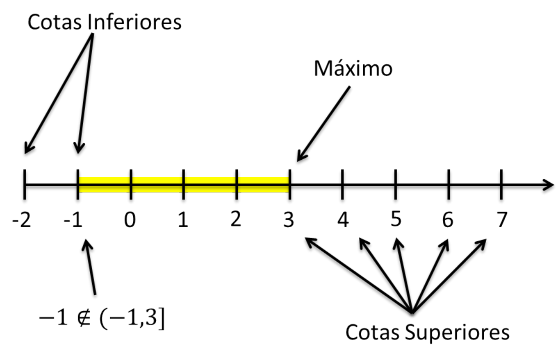
Solución En este caso

-1 es una cota inferior, pues $-1 \leq x, \quad \forall\, x \in A$

3 es cota superior, pues $3 \geq x, \quad \forall\, x \in A$

No tiene un valor mínimo, pues si $x = \min A$ entonces $x \leq a$, $\forall a \in A$ pero $y = \dfrac{-1+x}{2}$ es tal que $-1 < y < x < 3$ por lo tanto $y \in A$ y $y < x$ (Falso pues x=$\min A$). Por lo tanto A no tiene ´mínimo.

3 es máximo, pues $3 \geq x, \quad \forall\, x \in A$



Ejemplo Hallar el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de A para $A = [-1, 3)$

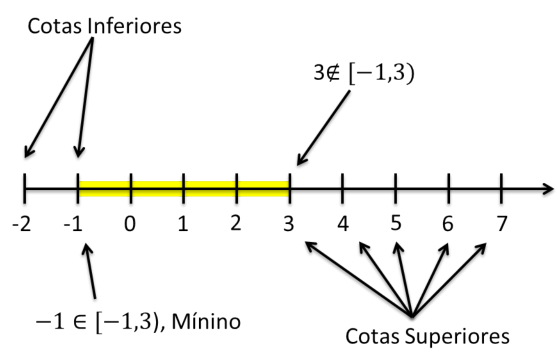
Solución En este caso

-1 es una cota inferior, pues $-1 \leq x, \quad \forall\, x \in A$

3 es cota superior, pues $3 \geq x, \quad \forall\, x \in A$

No tiene un valor máximo, pues si $x = \max A$ entonces $x \geq a$, $\forall a \in A$ pero $y = \dfrac{3+x}{2}$ es tal que $-1 < x < y < 3$ por lo tanto $y \in A$ y $x < y$ (Falso pues x=$\max A$). Por lo tanto A no tiene ´máximo.

-1 es mínimo, pues $-1 \leq x, \quad \forall\, x \in A$



Ejemplo Hallar el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de A para $displaystyle A = \left\{\frac{1}{x} \mid x > 0\right\}$

Solución En este caso

Si $x = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Si $x = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Si $x = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4$

Por lo tanto al tomar valores positivos cercanos a cero se tiene que A no esta acotado superiormente

0 es cota inferior, pues $0 \leq x, \;\; \forall\, x \in A$

No tiene un valor mínimo, pues si $\frac{1}{x} = \min A$ entonces $\frac{1}{x} \leq a, \; \forall a \in A$ pero $y = \frac{1}{x+1}$ es tal que $0 < y = \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ por lo tanto $y \in A$ y $y < \frac{1}{x}$ (Falso pues $\frac{1}{x} = \min A$). Por lo tanto A no tiene ´mínimo.

No tiene máximo.

Teorema 1. *Suponga que F es un campo ordenado y $A \subset F$. Si A es no vacío y acotado inferiormente entonces existe* $\inf\ A$.

Demostración. Sea m una cota inferior de A y H el conjunto de las cotas inferiores. H es no vacío pues $m \in H$. H esta acotado superiormente por cualquier elemento de A. Por tanto según el axioma del supremo, existe $\sup\ H$.

Sea μ el supremo de H. Entonces $\mu = inf\ A$ pues

1) $\forall x \in A$ se verifica $\mu \leq x \quad$ (μ es cota inferior)

2) $\forall y \in H \;\; y \leq \mu$. Pues $\mu = \sup\ H \qquad$ Por tanto μ es el ínfimo de A. □

Teorema 2. *Suponga que F es un campo ordenado y $A \subset F$. Si A es tal que* $\sup\ A$ *existe, entonces* $\sup\ A$ *es único*

Demostración. Supongamos que $\sup\ A = S$ y $\sup\ A = B$ entonces $S \leq B$ por ser $B = \sup A$

$B \leq S$ por ser $S = \sup\ A \therefore S = B$ □

Teorema 3. *Suponga que F es un campo ordenado y $A \subset F$. Si A es no vacío y acotado superiormente, entonces*

$$M = \sup\ A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1)\; x \leq M, \;\; \forall x \in A \\ 2)\; \forall \varepsilon > 0 \;\; existe \;\; x \in A \;\; tal \;\; que \;\; M < x + \varepsilon \end{cases}$$

Demostración. $\Rightarrow$ Sea $M = \sup\ A$ entonces

1) se cumple por definición de supremo

para 2) supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in A$, $M \geq x + \varepsilon$, es decir $x \leq M - \varepsilon, \;\; \forall\, x \in A \therefore \;\; M - \varepsilon$ es una cota superior de A y se tiene que $M - \varepsilon < M$ por tanto M no puede ser entonces supremo de A <u>CONTRADICCIÓN</u>.

$\Leftarrow$ Supongamos que se cumple 1) y 2) Por reducción al absurdo supongamos que M no es el supremo de A

por 1), M es cota superior de A. Sea $M' < M$ una cota superior y tomamos $\varepsilon = M - M'$ entonces si M cumple 2) $M < x + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad M < x + M - M' \quad \Rightarrow \quad M' < x$ para algún x <u>CONTRADICCIÓN</u>.

Pues M' es cota superior de A. $\therefore \;\; M = \sup\ A$. □

Teorema 4. *Suponga que F es un campo ordenado y $S \subset F$ es tal que $S \neq \emptyset$, S acotado superiormente y $a \in F$. Si*

$$a + S = \{a + x \mid x \in S\}$$

probar que $\sup\ (a + S) = a + \sup\ S$

Demostración. Por el axioma del supremo existe sup S sea $\mu = \sup\ S$ por lo que tenemos que

$$x \leq \mu \quad \forall x \in S \Rightarrow a + x \leq \mu + a \quad \forall x \in S$$

por lo que $\mu + a$ es cota superior de $a + S$ lo que implica que $\sup\ (a + S) \leq a + \mu$
Sea V una cota superior de $a + S$ por lo que

$$a + x \leq V \quad \forall x \in S \Rightarrow x \leq V - a \quad \forall x \in S \Rightarrow \mu \leq V - a \Rightarrow a + \mu \leq V$$

por lo que $a + \mu$ es la menor de las cotas superiores de $a + S$ $\therefore$ $\sup\ (a + S) = a + \mu = a + \sup\ S$ $\square$

Definición 4. *Un campo ordenado F es **completo** si satisface:*
Propiedad de Completez Todo subconjunto A no vacio de F que este acotado superiormente, tiene una mínima cota superior (sup A) en F.

Números Reales $\mathbb{R}$

Definición 5. *El conjunto de números reales es un campo ordenado completo y arquimediano. Denotado por $\mathbb{R}$*