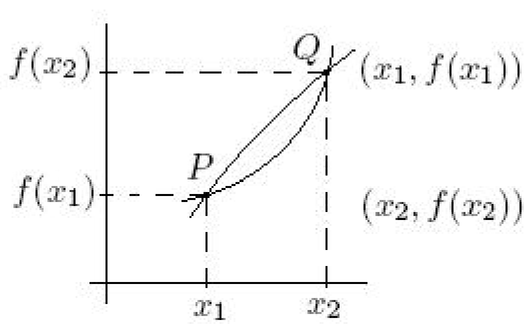
Razón de cambio

Al definir la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto fijo x_2, se tiene

$$f'(x_2) = \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Si x cambia de x_1 a x_2 tenemos que
$\triangle x = x_2 - x_1$
y el cambio correspondiente en y es:
$\triangle y = f(x_2) - f(x_1)$
El cociente de las diferencias

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se llama razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la línea secante PQ.

Al escribir

$$\lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

nos estamos refiriendo a la razon de cambio instantanea de la variable y cuando se consideran cambios cada vez más pequeños en la variable x. Podemos decir que con este limite se busca una razón de cambio instantanea de la variable y con respecto a la variable x

Ejemplo En Física

Si $f(t) = s$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, $\dfrac{\triangle s}{\triangle t}$ representa la velocidad promedio $\triangle t$ y

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

representa la velocidad instantánea

Ejemplo Dada la ecuación de movimiento rectilineo

$$s = t^3 + \frac{3}{t}$$

Hallar la velocidad promedio entre $t = 4$ y $t = 6$ y hallar la velocidad instantanea en $t = 4$

Solución En este caso para la velocidad promedio tenemos que

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(6) - s(4)}{6 - 4} = \frac{\left(216 + \frac{1}{2}\right) - \left(64 + \frac{3}{4}\right)}{6 - 4} = 75{,}875$$

En este caso para la velocidad instantanea tenemos que

$$\lim_{t\to 4}\frac{s(t)-s(4)}{t-4}=\frac{t^3+\frac{3}{t}-\left(64+\frac{3}{4}\right)}{t-4}=\lim_{t\to 4}\frac{\left(t^3-4^3\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{t}\right)}{t-4}=\lim_{t\to 4}\frac{(t-4)(t^2+4t+16)}{t-4}-3\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{t}}{t-4}$$

$$=\lim_{t\to 4}t^2+4t+16-3\left(\frac{t-4}{(4t)(t-4)}\right)=\lim_{t\to 4}t^2+4t+16-3\left(\frac{1}{4t}\right)=48-\frac{3}{16}=\frac{765}{16}$$

Ejemplo El radio en centimetros de un globo esférico que se esta inflando, después de t minutos está dado por

$$r(t)=3\sqrt[3]{t+8},\quad donde\quad 0\leq t\leq 10$$

. Cual es la razón de cambio en $t=8$ en
(a) $r(t)$
(b) El volumen del globo
(c) El área de la superficie esférica

Solución Par el inciso (a) se tiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(8+h)-r(8)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\sqrt[3]{16+h}-3\sqrt[3]{16}}{h}$$

Usamos la identidad algebraica

$$x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}$$

y tenemos entonces que

$$\lim_{h\to 0}\frac{3\sqrt[3]{16+h}-3\sqrt[3]{16}}{h}=3\lim_{h\to 0}\frac{(16+h)-16}{h((16+h)^{\frac{2}{3}}+(16+h)^{\frac{1}{3}}16^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{2}{3}})}=\frac{3}{3\cdot 16^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{16^{\frac{2}{3}}}$$

Para el inciso (b) tenemos que el volumen de la esfera es

$$v=\frac{4}{3}\pi r^3$$

ahora bien con este volumen y el radio dado obtenemos

$$v=\frac{4}{3}\pi(3\sqrt[3]{t+8})^3=36\pi(t+8)$$

luego entonces la razón de cambio instantanes es:

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(8+h)-v(8)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{36\pi(16+h)-36\pi(16)}{h}=36\pi\lim_{h\to 0}\frac{16+h-16}{h}=36\pi$$

Para el inciso (c) tenemos que el área de la superficie esférica es

$$v=4\pi r^2$$

ahora bien con esta área y el radio dado obtenemos

$$a = 4\pi(3\sqrt[3]{t+8})^2 = 36\pi(t+8)^{\frac{2}{3}}$$

luego entonces la razón de cambio instantanes es:

$$\lim_{h\to 0}\frac{a(8+h)-a(8)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{36\pi(16+h)^{\frac{2}{3}}-36\pi(16)^{\frac{2}{3}}}{h} = 36\pi\lim_{h\to 0}\frac{(16+h)^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{2}{3}}}{h}$$

$$= 36\pi\lim_{h\to 0}\frac{\left((16+h)^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left((16)^{\frac{1}{3}}\right)^2}{h} = 36\pi\lim_{h\to 0}\frac{\left((16+h)^{\frac{1}{3}}-16^{\frac{1}{3}}\right)\left((16+h)^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{1}{3}}\right)}{h}$$

$$= 36\pi\lim_{h\to 0}\frac{(16+h)^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{1}{3}}}{((16+h)^{\frac{2}{3}}+(16+h)^{\frac{1}{3}}16^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{2}{3}})} = \frac{24\pi}{16^{\frac{1}{3}}}$$

Teorema 1. *Si $f : D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es diferenciable en x_0 entonces f es continua en x_0*

Demostración. $\forall x\in D$ con $x\neq x_0$ se tiene que

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$

puesto que f es diferenciable en x_0 entonces

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

por tanto

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

y f es continua en x_0 □

Ejemplo El reciproco de este resultado no es cierto, para comprobarlo considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x\neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

comprobemos que f es continua pero no diferenciable en $x_0 = 0$.

Demostración. Primero comprobemos que f es continua en $x_0 = 0$ para eso tenemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

por tanto f es continua en cero.
Para comprobar que f no es diferenciable en cero tenemos que

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad el \quad cual \quad \nexists$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \nexists$$

por lo tanto f no es diferenciable en $x_0 = 0$ □

Ejemplo Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Para comprobar que f es diferenciable en cero tenemos que

Demostración.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

por lo tanto f es diferenciable en $x_0 = 0$ □

Ejemplo Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esta función es continua solo en $x_0 = 0$ pues

$$\lim_{x\to 0} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} x^2 = 0 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{x\to 0} 0 = 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = f(0)$$

por lo tanto es continua en cero.
Para comprobar que f es diferenciable en cero tenemos que

Demostración.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

por lo tanto f es diferenciable en $x_0 = 0$ □

Ejemplo Hallar $f'(x_0)$ para $f(x)=\ln(x)$ definida $\forall x \in \mathbb{R}^+$

Solución tenemos que

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(x)-\ln(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}=\ln\left(\lim_{x\to x_0}\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to x_0}\left[\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\right)=$$

$$\ln\left(e^{\frac{1}{x_0}}\right)=\frac{1}{x_0}$$

Ejemplo Hallar $f'(x_0)$ para $f(x)=e^x$ definida $\forall x \in \mathbb{R}$

Solución tenemos que

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}e^{x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}=e^{x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}$$

$$\underbrace{=}_{y=e^{x-x_0}-1\Rightarrow\ln(y+1)=x-x_0} e^{x_0}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=e^{x_0}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=e^{x_0}\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=e^{x_0}\frac{1}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$=e^{x_0}\frac{1}{\ln\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)}=e^{x_0}\frac{1}{\ln(e)}=e^{x_0}\frac{1}{1}=e^{x_0}$$