Derivadas de Orden superior

Para una función cualquiera f, al tomar la derivada, obtenemos una nueva función f' y podemos aplicar la derivada a f'.
La función $(f')'$ se suele escrbir f'' y recibe el nombre de derivada segunda de f. Si f'' existe, se dice que, f es dos veces derivable en a.
De manera similar podemos definir $f''' = (f'')'$
La notación usual es:

$$f' = f^1, \quad f'' = f^2, \quad f''' = f^3, ...,^{k+1} = (f^k)'$$

Las distintas funciones f^k para $k \geq 2$ son a veces llamadas derivadas de orden superior.
Podemos tomar $f^0 = f$.

Ejemplo Hallar $f^n(x)$ para $f(x) = a^{^x}$

Solución Tenemos que
$f'(x) = a^x \ln(a)$
$f''(x) = a^x \ln^2(a)$
$f'''(x) = a^x \ln^3(a)$
Esto sugiere la fórmula

$$(a^x)^n = \ln^n(x) \quad a > 0$$

Esta fórmula se puede demostrar por inducción
Para la base de la inducción $n = 1$ tenemos que

$$(a^x)' = a^x \ln(a)$$

Supongámos ahora la validez de la fórmula para n

$$(a^x)^n = a^x \ln^n(a)$$

Ahora veamos que la propiedad se cumple para $n + 1$
tenemos que

$$(a^x \ln^n(a))^{n+1} = ((a^x \ln^n(a))^n)' = \ln^n(a) ((a^x)^n)' = \ln^n(a) a^x \ln(a) = a^x \ln^{n+1}(a)$$

por lo tanto la fórmula es valida para $n + 1$.
Hallar $f^{17}(x)$ para $f(x) = a^x$
Tenemos que según la fórmula

$$f^{17}(x) = (a^x)^{17} = a^x \ln^{17}(a)$$

Ejemplo Hallar $f^n(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

Solución Tenemos que
$f'(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) = \cos(x)$
$f''(x) = -\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) = -\operatorname{sen}(x)$

$f'''(x) = -\cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + \cos(x)\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$
Esto sugiere la fórmula

$$(\operatorname{sen}(x))^n = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Esta fórmula se puede demostrar por inducción
Para la base de la inducción $n = 1$ tenemos que

$$(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) = \cos(x)$$

Supongámos ahora la validez de la fórmula para n

$$(\operatorname{sen}(x))^n = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Ahora veamos que la propiedad se cumple para $n + 1$
tenemos que

$$(\operatorname{sen}(x))^{n+1} = ((\operatorname{sen}(x))^n)' = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \underbrace{=}_{*} \operatorname{sen}\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

(*)La última igualdad la justificamos de la siguiente manera

$$\operatorname{sen}\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

por lo tanto la fórmula es valida para $n + 1$.
Ejemplo.-Hallar $f^{17}(x)$ para $f(x) = \operatorname{sen}(x)$
Tenemos que según la fórmula

$$f^{17}(x) = (\operatorname{sen}(x))^{17} = \operatorname{sen}\left(x + \frac{17\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right) + \cos(x)\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

Ejemplo Hallar $f^n(x)$ para $f(x) = \cos(x)$

Solución Tenemos que
$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$f''(x) = -\cos(x) = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(x) = -\cos(x)$
$f'''(x) = \operatorname{sen}(x) = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)$
Esto sugiere la fórmula

$$(\operatorname{sen}(x))^n = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Esta fórmula se puede demostrar por inducción
Para la base de la inducción $n = 1$ tenemos que

$$(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

Supongámos ahora la validez de la fórmula para n

$$(\cos(x))^n = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Ahora veamos que la propiedad se cumple para $n+1$
tenemos que

$$(\cos(x))^{n+1} = ((\cos(x))^n)' = -\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \underbrace{=}_{*} \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

(*)La última igualdad la justificamos de la siguiente manera

$$\cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

por lo tanto la fórmula es valida para $n+1$.
Ejemplo.-Hallar $f^{51}(x)$ para $f(x) = \cos(x)$
Tenemos que según la fórmula

$$f^{51}(x) = (\cos(x))^{51} = \cos\left(x + \frac{51\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{51\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{51\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)$$

$$f^{51}(x) = (\cos(x))^{51} = \cos\left(x + \frac{51\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{51\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{51\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(x)$$

Ejemplo Hallar $f^n(x)$ para $f(x) = x^m$

Solución Si $f(x) = x^m$
Tenemos que
$f'(x) = mx^{m-1}$
$f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$
$f'''(x) = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$
Esto sugiere la fórmula

$$f^n(x) = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$$

que se puede probar por iducción
Para n=1 se tiene

$$f^1(x) = \frac{m!}{(m-1)!}x^{m-1} = \frac{m\cdot(m-1)!}{(m-1)!}x^{m-1} = mx^{m-1}$$

Suponemos la validez para $n = k$

$$f^k(x) = \frac{m!}{(m-k)!}x^{m-k}$$

A partir de ahi probaremos la validez para $n = k+1$, tenemos que

$$f^{k+1}(x) = \left(f^k\right)^1(x) = \left(\frac{m!}{(m-k)!}x^{m-k}\right)^1 = \frac{m!}{(m-k)!}(m-k)x^{m-k-1} = m(m-1)\cdots(m-k)x^{m-k-1}$$

por lo tanto la fórmula es valida para $n = k+1$
Calcular $f^8(x)$ para $f(x) = x^{12}$
Tenemos que:

$$f^{12}(x) = \left(x^{12}\right)^{12} = \frac{8!}{(12-8)!}x^4 = 19958400x^4$$

Ejemplo Hallar $f^n(x)$ para $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución Si $f(x) = \frac{1}{x}$
Tenemos que
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f''(x) = \frac{2}{x^3}$
$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$
Esto sugiere la fórmula

$$f^n(x) = \frac{(-1)^n (n)!}{x^{n+1}}$$

que se puede demostrar por inducción
Tenemos que para $n = 1$

$$f^1(x) = \frac{(-1)^1 (1)!}{x^{1+1}} = -\frac{1}{x^2}$$

por lo tantoi la fórmula es valida para $n = 1$
Supongamos la validez para $n = k$

$$f^k(x) = \frac{(-1)^k (k)!}{x^{k+1}}$$

A partir de ahi vamos a probar la validez para $n = k + 1$ tenemos que

$$f^{k+1}(x) = \left(f^k\right)^1(x) = \left(\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\right)^1 = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1+1}}(-1)(k+1)\frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+1+1}}$$

por lo tanto la fórmula es valida para $n = k + 1$