Funciones

Definición 1. *Sean X, $Y \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos. Una función f del conjunto X en el conjunto Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento $x \in X$ un único elemento $f(x) \in Y$. La notación para una función es:*

$$f : X \to Y$$

Definición 2. *El conjunto*

$$\mathfrak{D}(f) = \{x \in X \mid \exists\ f(x) = y \in Y\}$$

*es llamado el **dominio** de f, se denota $\mathfrak{D}(f)$*

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

Encontrar el dominio de f.

Solución En este caso se tiene que

$$y = f(x) \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x-4} \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ x - 4 \neq 0 \ \Leftrightarrow\ x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$

por lo tanto

$$\mathfrak{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)\}$$

Definición 3. *El conjunto Y es llamado el **codominio** de f.*

Definición 4. *El conjunto*

$$\mathfrak{R}(f) = \{f(x) \in Y \mid x \in \mathfrak{D}(f) \subset X\}$$

*es llamado el **rango** de f. El rango de una función es un subconjunto del codominio.*

Ejemplo Encontrar el rango de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

Solución En este caso

$$\mathfrak{R}(f) = \left\{ \ y = \frac{1}{x-4} \in \ Y \ \middle| \ x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty) \right\}$$

Tenemos que

$$y = \frac{1}{x-4} \quad \Rightarrow \quad x - 4 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4y+1}{y}$$

Por lo tanto

$$x = \frac{4y+1}{y} \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty) \ \Leftrightarrow\ y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \frac{4y+1}{y} < 4 \right\} \ \text{ó}\ y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \frac{4y+1}{y} > 4 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \ \middle| \ \frac{4y+1}{y} < 4 \right\} \bigcup \left\{ y \in \mathbb{R} \ \middle| \ \frac{4y+1}{y} > 4 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4y+1-4y}{y} < 0 \right\} \bigcup \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4y+1-4y}{y} > 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y \;\middle|\; \frac{1}{y} < 0 \right\} \bigcup \left\{ y \;\middle|\; \frac{1}{y} > 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \quad y \in \{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\} \cup \{y \in\in \mathbb{R} \mid y > 0\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Por lo tanto

$$\Re(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Definición 5. *Dos funciones $f : X \to Y$ y $g : X' \to Y'$ se dice que son iguales si*

$$X = X', \quad Y = Y', \quad y \quad \forall\, x \in \ X, \quad f(x) = g(x)$$

Definición 6. *Función acotada*
Se dice que $f : X \to Y$ está acotada si el conjunto de números reales $f(X)$ está acotado; es decir, existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ $\forall x \in A$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $\dfrac{1}{x^2+1}$. Vamos a comprobar que f es acotada

Solución En este caso tenemos que

$$x^2 \geq 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x^2+1 \geq 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \;\Rightarrow\; -1 < 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

por lo tanto

$$\left| \frac{1}{x^2+1} \right| < 1$$

por lo tanto f es una función acotada

Definición 7. *Función Par*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es par si $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $\dfrac{1}{x^2+1}$. Vamos a comprobar que f es par

Solución En este caso tenemos que

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$$

por lo tanto f es una función par

Definición 8. *Función Impar*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es impar si $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por x^3. Vamos a comprobar que f es impar

Solución En este caso tenemos que

$$-f(-x) = -(-x)^3 = x^3 = f(x)$$

por lo tanto f es una función impar

Definición 9. *Función Periódica*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es periódica si $\exists$ $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in X$. El número T es el periodo de la función

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = x + [x]$. Donde $[x]$ denota al mayor entero $\leq x$. Vamos a comprobar que f es periódica

Solución En este caso tenemos que

$$x \in (1,2) \;\Rightarrow\; [x] = 1 \;\Rightarrow\; x - [x] = x - 1$$

por ejemplo

$$x = 1{,}5 \in (1,2) \;\Rightarrow\; [1{,}5] = 1 \;\Rightarrow\; x - [x] = 1{,}5 - 1 = {,}5$$

mientras que

$$x \in (2,3) \;\Rightarrow\; [x] = 2 \;\Rightarrow\; x - [x] = x - 2$$

por ejemplo

$$x = 2{,}5 \in (1,2) \;\Rightarrow\; [2{,}5] = 2 \;\Rightarrow\; x - [x] = 2{,}5 - 2 = {,}5$$

por lo tanto $f(x) = x - [x]$ es una función periódica

Definición 10. *Función Monotona*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es monótona creciente si para dos puntos arbitrarios x y x' de X tales que $x < x'$ se verifica: $f(x) \leq f(x')$. Estrictamente creciente si $f(x) < f(x')$. $\forall x, x' \in X$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = x^3$. Vamos a comprobar que f es monotona estrictamente creciente

Solución En este caso tenemos que

$$x < x_1 \;\Rightarrow\; x^3 < x_1^3 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_1)$$

por lo tanto $f(x) = x^3$ es una función monotona estrictamente creciente

Definición 11. *Función Monotona*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es monótona decreciente si para dos puntos arbitrarios x y x' de X tales que $x < x'$ se verifica: $f(x) \geq f(x')$. Estrictamente creciente si $f(x) > f(x')$. $\forall x, x' \in X$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vamos a comprobar que f es monotona estrictamente decreciente

Solución En este caso tenemos que

$$x < x_1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x} \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x)$$

por lo tanto $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es una función monotona estrictamente decreciente

Definición 12. *Función Constante*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es constante si $f(x) = c \ \forall x \in X$

Ejemplo Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = 5$. Vamos a comprobar que f es cosntante

Solución En este caso tenemos que

$$x < x_1 \ \Rightarrow \ \ f(x) = 5 = f(x_1)$$

por lo tanto $f(x) = 5$ es una función constante

Definición 13. *Función Identidad*
Es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) = x \ \forall x \in X$

Definición 14. *Función Característica*
Si S es un subconjunto de X se define en X una función real llamada función característica del conjunto S

$$X_S : X \to Y \quad \textit{como} \quad X_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

Definición 15. *Función Polinomial*
Se designará con el nombre de función polinomial a cualquier función cuya regla de correspondencia esté dada por una fórmula del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

donde n es un número natural o cero y los coeficientes a_i son números reales.

Definición 16. *Función Racional*
Se designará con el nombre de función racional a cualquier función cuya regla de correspondencia esté dada como el cociente de dos polinomios

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0}$$

f está definida para todos los valores de x en los que no se anula el denominador.

Definición 17. *Función inyectiva ó uno-uno*
Una función $f : X \to Y$ se dice que es inyectiva ó uno-uno si:

$$Dados \quad x_1, x_2 \in Dom_f \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Equivalentemente, mediante la implicación contrarreciproca, podemos decir Una función $f : A \to B$ se dice que es inyectiva, biunívoca ó uno-uno si:

$$\forall \; x_1, x_2 \in A \quad tal \quad que \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ejemplo *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$.*
Para ver que f es inyectiva

$$Sean \quad x_1, x_2 \in Dom_f \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore \quad f \quad es \quad inyectiva$$

Definición 18. *Función Suprayectiva ó Sobreyectiva*
Sea una función $f : X \to Y$. Si ocurre que $\Re(f) = Y$. Esto es

$$f : X \to Y \quad es \quad sobreyectiva \; \Leftrightarrow \; \forall \; y \; \in \; Y, \; \exists \; x \in X \; \ni \; f(x) = y$$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$\forall \; y \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \; y = f(x) \; \Rightarrow \; y = -x + 1 \; p \; a \; x \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \; x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

y f es sobreyectiva

Definición 19. *Función Biyectiva*
Sea una función $f : X \to Y$. Si ocurre que $\Re(f) = Y$. Y además f es uno-uno, se dice que f es biyectiva

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Para ver que es inyectiva tenemos que

$$Sean \;\; x, \; x_1 \in \mathbb{R}, \;\; \ni \; f(x) = f(x_1) \; \Rightarrow \; -x + 1 = -x_1 + 1 \; \Rightarrow \; -x = -x_1 \; \Rightarrow \; x = x_1$$

y por lo tanto f es inyectiva.
Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$\forall \; y \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \; y = f(x) \; \Rightarrow \; y = -x + 1 \; p \; a \; x \in \mathbb{R} \; \Rightarrow \; x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

y f es sobreyectiva y en consecuencia f es biyectiva