Sucesiones parte 5

Lema 1. *Sea $a > 1$. La función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $f(r) = a^r$ es estrictamente creciente en $\mathbb{Q}$ y si $0 < a < 1$. La función $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $f(r) = a^r$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{Q}$*

Demostración. Supongamos que $a > 1$. Sea $r < s \in \mathbb{Q}$. Entonces existen $m, n \in \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{N}$ tal que $r = \dfrac{m}{p}$ y $s = \dfrac{n}{p}$ con $m < n$. Se tiene entonces que

$$a^{n-m} \geq a > 1 \Rightarrow a^n = a^m a^{n-m} > a^m$$

Como la función $f(x) = \sqrt{x}$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ se tiene que

$$(a^m)^{\frac{1}{p}} < (a^n)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow a^r = a^{\frac{m}{p}} < a^{\frac{n}{p}} = a^s$$

por lo tanto f es esctrictamente creciente
Si $0 < a < 1$, definimos $f(r) = a^r = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^r}$ por lo que

$$a < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{a} \Rightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{Z} \ \ y \ \ p \in \mathbb{N}, \ \ tal \ \ que \ \ r = \frac{m}{p} \ \ y \ \ s = \frac{n}{p}$$

tal que

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{n-m} \geq \left(\frac{1}{a}\right) > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^{n-m} > \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Como la función $f(x) = \sqrt{x}$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ se tiene que

$$\left(\left(\frac{1}{a}\right)^m\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{p}}} < \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{p}}} \Rightarrow a^s = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{p}}} < \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{p}}} = a^r$$

por lo tanto f es esctrictamente decreciente

□

Lema 2. *Dado un $x \in \mathbb{R}$, existe una sucesión monotona decreciente $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números racionales tal que*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existe $r_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $x - 1 < r_1 < x$.
Existe también $r_2 \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\text{máx}\{x - \frac{1}{2}, r_1\} < r_2 < x$$

. Existe también $r_3 \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\text{máx}\{x - \frac{1}{3}, r_2\} < r_3 < x$$

. Continuando este proceso Existe también $r_{k+1} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\text{máx}\{x - \frac{1}{k+1}, r_k\} < r_{k+1} < x$$

. Se tiene que por construcción, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números racionales estrictamente creciente que converge a x. □

Lema 3. *Sea $a \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monotona creciente de números racionales que convergen a x, entonces $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge*

Demostración. Sea $a \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x$$

Como $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $f(r) = a^r$ es estrictamente creciente, entonces $(a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es monotona estrictamente creciente.
Si $r \in \mathbb{Q}$ es un número racional tal que

$$r_n \leq x < r$$

entonces

$$a^{r_n} < a^r \;\Rightarrow\; (a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}} \;\; es \;\; acotada \;\; superiormente \;\Rightarrow\; (a^{r_n})_{n\in\mathbb{N}} \;\; es \;\; convergente$$

□

Definición 1. *Sea $a \geq 1$. Entonces $\forall\ x \in \mathbb{R}$ definimos*

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

donde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monotona estrictamente creciente de números racionales que convergen a x.
Si $0 < a < 1$, entonces $a^{-1} > 1$ y por tanto $\forall\ x \in \mathbb{R}$ definimos

$$a^x = \frac{1}{(a^{-1})^x}$$

De manera que

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(a^{-1})^{r_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (a^{-1})^{r_n}} = \frac{1}{(a^{-1})^x} = a^x$$

Por lo tanto $\forall\ a \geq 0$ y $\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

Teorema 1. *Sea $a > 1$. Entonces la función exponencial $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente $\forall\ x \in \mathbb{R}$*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $x < y$, existen un racional q tal que $x < q < y$.
Sean (r_n) y (s_n) sucesiones de números reales tales que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = x$$

Por otro lado

$$r_n \leq x < q < s_n \leq y$$

como $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{Q}$ entonces

$$a^{r_n} < a^q < a^{s_n}$$

tomando limites

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} < a^q < \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^y$$

por lo tanto $a^x < a^y$ por lo tanto la función es estrictamente creciente □

Teorema 2. *Sean $a, b > 0$. La función exponencial satisface:*
(a) $a^0 = 1$
(b) $a^x a^y = a^{x+y}$
(c) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
(d) $(ab)^x = a^x b^x$
(e) $a^{-x} = (a^x)^{-1} = (a^{-1})^x$
(f) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Demostración. Para el inciso (a) consideramos la sucesión de término general $r_n = 0$, $\forall \in \mathbb{N}$ y se tiene entonces que:

$$a^0 = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$$

Para el inciso (b) consideramos sucesiones monotonas crecientes $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} r_n = x \quad y \quad \lim_{n\to\infty} s_n = y$$

se tiene entonces que

$$\lim_{n\to\infty} r_n + s_n = x + y$$

por lo tanto

$$a^x a^y = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n + s_n} = a^{x+y}$$

Para el inciso (c) tenemos que

$$a^{x-y}a^y = a^x \;\Rightarrow\; a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \qquad a^y \neq 0$$

Para el inciso (d) consideremos $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monotona creciente de números racionales que convegren a x. Entonces

$$(ab)^x = \lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^x b^x$$

Para el inciso (e) consideremos $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monotona creciente de números racionales que convegren a x. Entonces

$$\left(a^{-1}\right)^x = \lim_{n\to\infty} \left(a^{-1}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n})^{-1} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a^{r_n}} = \frac{a^0}{a^x} = a^{0-x} = a^{-x}$$

$$(a^x)^{-1} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n})^{-1} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a^{r_n}} = \frac{a^0}{a^x} = a^{0-x} = a^{-x}$$

Para el inciso (f) consideremos $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monotona creciente de números racionales que convegren a x. Entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = (ab^{-1})^x = a^x(b^{-1})^x = a^x(b^x)^{-1} = \frac{a^x}{b^x}$$

□

Teorema 3. *Sea $a \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monotona decreciente de números racionales que convergen a x, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a^{tn} = a^x$$

Demostración. Definimos la sucesión

$$r_n = 2x - t_n$$

Se tiene entonces que $r_n \to x$ y r_n es monotona creciente, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a^{t_n} = \lim_{n\to\infty} a^{2x-r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2x}}{a^{r_n}} = \frac{a^{2x}}{\lim_{n\to\infty} a^{r_n}} = \frac{a^{2x}}{a^x} = a^x$$

$\square$

Teorema 4. *Sea $a \geq 1$ y $x \in \mathbb{R}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales que convergen a x, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$$

Demostración. Tenemos que existen sucesiones $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotona creciente y decreciente de números racionales respectivamente tal que

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x \quad y \quad \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^x$$

Como la función $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente, sea $\epsilon > 0$ entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a^x - \epsilon < a^{r_{n_1}} < a^x < a^{r_{s_1}} < a^x + \epsilon$$

Por otro lado

$$r_{n_1} < x < s_{n_1}, \quad y \quad como \quad x_n \to x \quad entonces \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad tal \quad que \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; r_{n_1} < x_n < s_{n_1}$$

Como la función $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente

$$n \geq n_0 \;\to\; a^x - \epsilon < a^{r_{n_1}} < a^{x_n} < a^{r_{s_1}} < a^x + \epsilon \;\to |a^{x_n} - a^x| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$$

Si $0 < a < 1$ se tiene que $a^{-1} > 1$ y aplicando lo anterior se tiene

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(a^{-1})^{x_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (a^{-1})^{x_n}} = \frac{1}{(a^{-1})^x} = a^x$$

$\square$

Ejemplo Use lo anterior para mostrar que la sucesión

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

tiene limite

Demostración. Para esto se tiene que:
$a_1 = 2^{\frac{1}{2}}$, $a_2 = \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{4}}$, $a_3 = 2^{\frac{7}{8}}$,..., $a_n = 2^{\frac{2^n-1}{2^n}}$ por tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{2^n-1}{2^n}} = 2^{\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}} = 2^1 = 2$$

□