Sucesiones parte 6

Definición 1. *Suponga que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de números reales. Se dice que*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{diverge a } +\infty \ \left(\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty\right) \quad \textit{si}$$

$$\forall\ M > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ \ni\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ a_n > M$$

Ejemplo Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n}{5n + 23} = +\infty$$

Demostración. Vamos a mostrar que

$$n_0 \in \mathbb{N} \ \ es \ \ tal \ \ que \ \ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \frac{3n^2 - 2n}{5n + 23} > M$$

en este caso se tiene

$$\frac{3n^2 - 2n}{5n + 23} > \frac{3n - 2}{6}, \quad si \ \ n \geq 24$$

por otro lado

$$\frac{3n - 2}{6} > M \ \Leftrightarrow\ 3n - 6 > 6M \ \Leftrightarrow\ 3n > 6M + 2 \ \Leftrightarrow\ n > \frac{6M + 2}{3}$$

De manera que proponemos

$$n_0 \geq \max\left\{24, \frac{6M + 2}{3}\right\}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
n \geq n_0 \ &\Rightarrow\ n > \frac{6M + 2}{3} \ \ y \ \ n \geq 24 \\
&\Rightarrow\ 3n > 6M + 2 \ \ y \ \ n \geq 24 \\
&\Rightarrow\ 3n - 2 > 6M \ \ y \ \ n \geq 24 \\
&\Rightarrow\ \frac{3n - 2}{6} > M \ \ y \ \ n \geq 24 \\
&\Rightarrow\ \frac{3n^2 - 2n}{6n} > M \ \ y \ \ n \geq 24 \\
&\Rightarrow\ \frac{3n^2 - 2n}{5n + 23} > \frac{3n^2 - 2n}{6n} > M
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 2n}{5n + 23} = +\infty$$

□

Definición 2. *Suponga que* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de números reales. Se dice que*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\; diverge \; a \;\; -\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right) \quad si$$

$$\forall\ M > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \ni\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ a_n < -M$$

Ejemplo Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}} = -\infty$$

Demostración. Vamos a mostrar que

$$n_0 \in \mathbb{N} \;\; es \;\; tal \;\; que \;\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \frac{1-n}{\sqrt{n}} < -M$$

en este caso se tiene

$$\frac{1-n}{\sqrt{n}} < -M \;\Rightarrow\; \frac{n-1}{\sqrt{n}} > M$$

ahora bien

$$\frac{n-1}{\sqrt{n}} > \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{1})(\sqrt{n}+\sqrt{1})}{\sqrt{n}+1} = \sqrt{n}-1$$

por lo tanto

$$\sqrt{n}-1 > M \;\Rightarrow\; \sqrt{n} > M+1 \;\Rightarrow\; n > (M+1)^2$$

Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > (M+1)^2$ de manera que

$$\begin{aligned}
n \geq n_0 \;&\Rightarrow\; n > (M+1)^2 \\
&\Rightarrow\; \sqrt{n} > M+1 \\
&\Rightarrow\; \sqrt{n}-1 > M \\
&\Rightarrow\; \frac{(\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}-1)}{\sqrt{n}+1} > M \\
&\Rightarrow\; \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} > M \\
&\Rightarrow\; \frac{n-1}{\sqrt{n}} > \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} > M \\
&\Rightarrow\; \frac{1-n}{\sqrt{n}} < -M
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}} = -\infty$$

□

Teorema 1. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ *entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Demostración. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, sea $m = [a_n]$. Entonces $m \leq a_n < m+1$ por lo tanto

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

es decir

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}$$

cuando tomando limites cuando $n\to\infty$ en toda la desigualdad se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m-1}\cdot\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{-1}$$

$$= e\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{-1} = e\cdot\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)} = e\cdot 1 = e$$

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{1} = e\cdot(1) = e$$

es decir

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m} < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = e$$

$\therefore$ según el teorema del compresión

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ tomamos $\mu n = -a_n$, como

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1-\frac{1}{\mu n}\right)^{-\mu n} = \left(\frac{\mu n}{\mu n-1}\right)^{\mu n} = \left(1+\frac{1}{\mu n-1}\right)^{\mu n}$$

Asi que el limite buscado es:

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \lim_{\mu n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mu n-1}\right)^{\mu n} = \lim_{\mu n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\mu n-1}\right)^{\mu n-1}\right]^{\frac{\mu n}{\mu n-1}} =$$

$$= \left[\lim_{\mu n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mu n-1}\right)^{\mu n-1}\right]^{\lim_{\mu n\to\infty}\frac{\mu n}{\mu n-1}} = e$$

$\square$

Ejemplo Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$$

Solución Para esto se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right]^{\frac{n}{3}}\right)^3=\left(\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right]^{\frac{n}{3}}\right)^3=[e]^3=e^3$$

Ejemplo Si se tiene $x\in\mathbb{R}^+$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

Solución En efecto pues

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right]^{\frac{n}{x}}\right)^x=\left(\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right]^{\frac{n}{x}}\right)^x=[e]^x=e^x$$

Ejemplo Si se tiene $x\in\mathbb{R}^-$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n=e^{-x}=\frac{1}{e^x}$$

Solución En efecto pues

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{n}{-x}}\right]^{\frac{n}{-x}}\right)^{-x}=\frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\frac{n}{-x}}\right]^{\frac{n}{-x}}\right)^x}=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$$

Subsucesiones

Definición 3. *Dada una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, definimos una* ***subsucesion*** $\{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$ *como una sucesión de la forma*

$$a_{n_1},\ a_{n_2},\ a_{n_3},\ a_{n_4}, ..., ,\ a_{n_k}$$

donde los n_k son números naturales con

$$n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k$$

Ejemplo Vamos a mostrar que la sucesión de término general

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

es subsucesión de una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solución Tenemos que los términos de la sucesión son:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{4}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{6}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{8}\right)^4,\ \left(1+\frac{1}{10}\right)^5, ...$$

que se pueden escribir

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},\ \left[\left(1+\frac{1}{4}\right)^4\right]^{\frac{1}{2}},\ \left[\left(1+\frac{1}{6}\right)^6\right]^{\frac{1}{2}},\ \left[\left(1+\frac{1}{8}\right)^8\right]^{\frac{1}{2}},\ \left[\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}\right]^{\frac{1}{2}}, ...$$

dichos términos son una subsucesión de la sucesión de término general

$$b_n = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Intuitivamente

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \sqrt{e}$$

Necesitamos probar que esto es correcto.

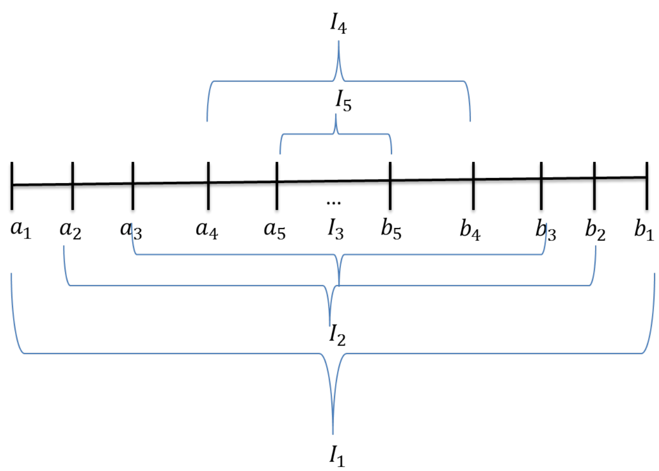
Teorema 2. ***Intervalos Encajados*** *Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos cerrados no vacios $I_n = [a_n, b_n]$ tal que*
$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$ *entonces*

$$(1) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$$

$$(2) \quad Si \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \quad entonces \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \quad es \quad un \quad punto$$

Demostración. Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos cerrados no vacios $I_n = [a_n, b_n]$ con

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$$



ahora consideremos las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de los puntos extremos de cada intervalo I_n y como son encajados tenemos

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq .... \leq b_2 \leq b_1$$

Se tiene entonces que la sucesión $\{a_n\}$ es monotona creciente y acotada por superiormente por b_1 Se tiene entonces que la sucesión $\{b_n\}$ es monotona creciente y acotada por inferiormente por a_1 por lo tanto existen los limites

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

por otro lado $\forall\ n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq b_n$ por tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n \ \Rightarrow\ a \leq b$$

Vamos a probar que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$$

Sea $x \in [a, b]$ entonces $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n$ es decir $x \in I_n$ por tanto $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$[a, b] \subset I_n$$

por lo tanto

$$[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

Supongamos ahora que

$$y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ \Rightarrow\ \forall\ n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq y \leq b_n$$

por lo tanto
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq y \leq \lim_{n\to\infty} b_n \;\Rightarrow\; a \leq y \leq b$$
por lo tanto
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset [a,b]$$
en consecuencia
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a,b]$$
Si suponemos ahora que
$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\Rightarrow\; b - a = 0 \;\Rightarrow\; a = b$$
por lo anterior se tiene
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$$
□

Teorema 3. ***Bolzano Weierstrass*** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente*

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es acotada. Entonces existen $A,\ B\ \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$,
$$A \leq a_n \leq B$$
Vamos a contruir una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de $\{a_n\}$
Sea $a_{n_1} = a_1$.
Consideramos el intervalo cerrado $[a_1, b_1] = [A, B]$
llamemosle I_1 y lo divido en dos partes iguales,
$$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \quad \left[\frac{a_1+b_1}{2},\ b_1\right]$$
en ambos existen una infinidad de elementos de $\{a_n\}$ tomemos en uno de estos subintervalos un elemento de $\{a_n\}$ y nombremosle a_{n_2} de tal manera que $n_2 > n_1$ a este subintervalo llamemosle $I_2 = [a_2, b_2]$ y notemos que
$$I_1 \subset I_2 \quad y \quad long\ ([a_2,b_2]) = \frac{1}{2} long\ ([a_1,b_1])$$
Vamos ahora a dividir en dos partes iguales I_2,
$$\left[a_2, \frac{a_2+b_2}{2}\right], \quad \left[\frac{a_2+b_2}{2},\ b_2\right]$$
en ambos existen una infinidad de elementos de $\{a_n\}$ tomemos en uno de estos subintervalos un elemento de $\{a_n\}$ y nombremosle a_{n_3} de tal manera que $n_3 > n_2$ a este subintervalo llamemosle $I_3 = [a_3, b_3]$ y notemos que
$$I_2 \subset I_3 \quad y \quad long\ ([a_3,b_3]) = \frac{1}{2} long\ ([a_2,b_2]) = \frac{1}{4} long\ ([a_1,b_1])$$

continuando con este proceso contruimos una sucesión $\{I_k\}$ tal que

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq ...$$

y cada uno de estos subintervalos $I_k = [a_k, b_k]$ contiene a_{n_k} con $n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$
de esta manera a_{n_k} es una subsucesión de a_n y cada subintervalo I_k tiene longitud

$$long\ ([a_k, b_k]) = \frac{1}{2^{k-1}} long\ ([a_1, b_1])$$

Según el principio de intervalos encajados

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_k = \{L\}$$

Decimos que

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = L$$

pues $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $L \in I_k$ y también $a_{n_k} \in I_k$ por lo que

$$|a_{n_k} - L| < long\ ([a_k, b_k]) = \frac{1}{2^{k-1}} long\ ([a_1, b_1])$$

la cual es tan pequeña como se desee a medida que k es grande, por lo tanto

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = L$$

$\square$