Sucesiones parte 7

Lema 1. *Si* $\{n_k\}$ *es una sucesión estrictamente creciente de números naturales entonces*

$$\forall\ k \in \mathbb{N}, \quad n_k \geq k$$

Demostración. La prueba es por inducción matemática
Tenemos que para $k = 1$ se tiene $n_1 \geq 1$ se cumple
supongamos que

$$n_k \geq k$$

a partir de ahi tenemos que

$$n_{k+1} > n_k \geq k$$

de lo anterior se tiene que $n_k > k + 1$ ó $n_k = k + 1$ en cualquier caso

$$n_{k+1} \geq k + 1$$

□

Teorema 1. *Una sucesión* $\{a_n\}$ *converge hacia un número real* L *si y solo si toda subsucesión de* $\{a_n\}$ *converge hacia* L

Demostración. ($\Rightarrow$)
Supongamos que $\{a_n\}$ converge hacia L. Sea $\{a_{n_k}\}$ una subsucesión de $\{a_n\}$ vamos a probar que $\{a_{n_k}\}$ converge hacia L
Sea $\epsilon > 0$ si $\{a_n\}$ converge hacia un número real L

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ \ tal \ \ que \ \ n > n_0 \ \ entonces \ \ |a_n - L| < \epsilon$$

entonces si

$$k > n_0 \ \Rightarrow \ n_k \geq k \geq n_0 \ \Rightarrow \ |a_{n_k} - L| < \epsilon$$

por lo tanto $\{a_{n_k}\}$ converge hacia L
($\Leftarrow$)
Supongamos que $\{a_{n_k}\}$ es una subsucesión de $\{a_n\}$ tal que converge hacia L. Vamos a probar que $\{a_n\}$ converge hacia L
Sea $\epsilon > 0$ si $\{a_{n_k}\}$ converge hacia un número real L

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ \ tal \ \ que \ \ n_k > n_0 \ \ entonces \ \ |a_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

como $\{a_{n_k}\}$ converge hacia L entonces $\{a_{n_k}\}$ es una sucesión de Cauchy, Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_k > n_0 \quad \Rightarrow \quad |a_n - a_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}$$

por lo tanto

$$|a_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2} \ \ y \ \ |a_n - a_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \ |a_{n_k} - L + a_n - a_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\Rightarrow \ |a_n - L| < \epsilon$$

$$\therefore \ \ \forall \ n > k > n_0 \ \ se \ \ tiene \ \ |a_n - L| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

entonces si

$$k > n_0 \ \Rightarrow \ n_k \geq k \geq n_0 \ \Rightarrow \ |a_{n_k} - L| < \epsilon$$

por lo tanto $\{a_{n_k}\}$ converge hacia L □

Ejemplo Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$$

Solución Tenemos que los términos de la sucesión son:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^1, \ \left(1+\frac{1}{6}\right)^2, \ \left(1+\frac{1}{9}\right)^3, \ \left(1+\frac{1}{12}\right)^4, \ \left(1+\frac{1}{15}\right)^5, \dots$$

que se pueden escribir

$$\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}, \ \left[\left(1+\frac{1}{6}\right)^6\right]^{\frac{1}{3}}, \ \left[\left(1+\frac{1}{9}\right)^9\right]^{\frac{1}{3}}, \ \left[\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\right]^{\frac{1}{3}}, \ \left[\left(1+\frac{1}{15}\right)^{15}\right]^{\frac{1}{3}}, \dots$$

dichos términos son una subsucesión de la sucesión de término general

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{3}}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{3}} = \left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= e^{\frac{1}{3}}$$

Teorema 2. *Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ si y solo si toda subsucesión $(a_{n_k}) \subset (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$*

Demostración. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ y (a_{n_k}) es una subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sea $M > 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow \ a_n > M$$

ahora bien

$$k \geq n_0 \ \Rightarrow \ n_k \geq k \geq n_0 \ \Rightarrow \ a_{n_k} > M$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = +\infty$$

□

Definición 1. *Sea $a > 0$, $a \neq 1$ definimos la función logaritmo base a*

$$f(x) = \log_a x$$

como la función inversa de la función

$$g(x) = a^x$$

esto es

$$y = \log_a x \iff a^y = x$$

y en el caso de la función logaritmo base e

$$y = \ln x \iff e^y = x$$

Teorema 3. *Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \log_b a_n = \log_b L_1$$

Demostración. Tenemos que

$$|\log_b a_n - \log_b L_1| = \left|\log_b \frac{a_n}{L_1}\right| = \left|\log_b\left(1 + \frac{a_n - L_1}{L_1}\right)\right|$$

Sea $b > 1$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L_1| < L_1(1 - b^{-\epsilon})$ para todo $n > N_\epsilon$ es decir

$$b^{-\epsilon} - 1 < \frac{a_n - L_1}{L_1} < 1 - b^{-\epsilon} \Rightarrow b^{-\epsilon} < 1 + \frac{a_n - L_1}{L_1} < 2 - b^{-\epsilon} < b^{\epsilon}$$

La última desigualdad se justifica

$$1 < b \;\Rightarrow\; 1^\epsilon < b^\epsilon \;\Rightarrow\; 0 < b^\epsilon - 1 \;\Rightarrow\; b^\epsilon - 1 < b^\epsilon(b^\epsilon - 1) \;\Rightarrow\; \frac{b^\epsilon - 1}{b^\epsilon} < b^\epsilon - 1$$

$$\Rightarrow\; 1 - \frac{1}{b^\epsilon} < b^\epsilon - 1 \;\Rightarrow\; 1 - b^{-\epsilon} < b^\epsilon - 1 \;\Rightarrow\; 2 - b^{-\epsilon} < b^\epsilon$$

$$\Rightarrow -\epsilon < \log_b\left(\frac{a_n - L_1}{L_1}\right) < \epsilon \Rightarrow \left|\log_b \frac{a_n}{L_1}\right| < \epsilon \Rightarrow |\log_b a_n - \log_b L_1| < \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon$$

□

Teorema 4. *Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^\lambda = L_1^\lambda$$

Demostración. tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n^\lambda = \lim_{n\to\infty} e^{\ln a_n^\lambda} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln a_n^\lambda} = e^{\lambda \ln(\lim_{n\to\infty} a_n)} = e^{\lambda \ln(L_1)} = e^{\ln L_1^\lambda} = L_1^\lambda$$

□

Teorema 5. *Dadas dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$ *entonces:*

$$(c) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = L_1^{L_2}$$

Demostración. tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} \ln(a_n^{b_n})} = e^{b_n \ln(\lim_{n\to\infty} a_n)} = e^{L_2 \ln(L_1)} = e^{\ln L_1^{L_2}} = L_1^{L_2}$$

□

Ejemplo Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3+1}\right)^{\frac{3n^4+2}{n}}$$

Solución para esto se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3+1}\right)^{\frac{3n^4+2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+1-1}{n^3+1}\right)^{\frac{3n^4+2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{-1(n^3+1)}\right)^{-1(n^3+1)}\right)^{\frac{3n^4+2}{-1(n^3+1)n}} =$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{-1(n^3+1)}\right)^{-1(n^3+1)}\right)^{\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4+2}{-1(n^3+1)n}} = e^{-3}$$

Ejercicio Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

y sea $\{b_n\}$ una sucesión tal que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}$$

Solución Definimos una sucesión $\{c_n\}$ de la siguiente manera

$$c_n = \frac{1}{a_n - 1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n - 1} = \infty$$

esto quiere decir

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{c_n}\right)^{c_n} = e$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty} (1 + a_n - 1)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{b_n(a_n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n}\right]^{b_n(a_n-1)} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{c_n}\right)^{c_n}\right]^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n(a_n-1)}$$

Ejercicio Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+n}{8+n}\right)^{6n-1}$$

Solución En este caso hacemos

$$a_n = \frac{3+n}{8+n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+n}{8+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{n}{n}}{\frac{8}{n} + \frac{n}{n}} = 1$$

$$b_n = 6n - 1 \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 6n - 1 = \infty$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+n}{8+n}\right)^{6n-1} = e^{\lim_{n\to\infty}(6n-1)\left(\frac{3+n}{8+n}-1\right)}$$

y en este caso

$$\lim_{n\to\infty} (6n-1)\left(\frac{3+n}{8+n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-30n+5}{8+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-30n}{n} + \frac{5}{n}}{\frac{8}{n} + \frac{n}{n}} = -30$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+n}{8+n}\right)^{6n-1} = e^{\lim_{n\to\infty}(6n-1)\left(\frac{3+n}{8+n}-1\right)} = e^{-30}$$

Ejercicio Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$$

Solución En este caso hacemos

$$a_n = \frac{2n+1}{2n+4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{4}{n}} = 1$$

$$b_n = \frac{n^2}{n+1} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\left(\frac{2n+1}{2n+4}-1\right)}$$

y en este caso

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\left(\frac{2n+1}{2n+4}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n^2}{2n^2+6n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-3n^2}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{6n}{n^2}+\frac{4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{2+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}=-\frac{3}{2}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\left(\frac{2n+1}{2n+4}-1\right)}=e^{-\frac{3}{2}}$$