Operaciones con funciones

Definición 1. *Dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ $g : B \to \mathbb{R}$. Las funciones suma, diferencia, producto y cociente se definen en el conjunto $A \bigcap B$ como sigue:*

$$\begin{aligned} f+g: &\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A \bigcap B \\ f-g: &\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in A \bigcap B \\ f\times g: &\quad (f\times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad \forall x \in A \bigcap B \\ \frac{f}{g}: &\quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in A \bigcap B \quad \ni g(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Composición de funciones

Definición 2. *Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ supongamos que $\mathfrak{R}(f) \subset \mathfrak{D}(g)$ entonces $h : A \to C$ es la función compuesta $h = g \circ f$ si se verifica*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) \quad \forall x \in A, \quad y \quad \mathfrak{R}(f) \subset \mathfrak{D}(g)$$

Ejemplo Considerese las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = 2x - 3$. Calcular $f \circ g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $g \circ f(3)$

Solución En este caso se tiene

$$f \circ g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\right) = f(-2) = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g\left(\frac{1}{3-1}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = -2$$

Ejemplo Considerese las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = 2x - 3$. Obtener las reglas de correspondencia para $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$

Solución En este caso se tiene

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \frac{1}{2x-3-1} = \frac{1}{2x-4}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = 2\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3 = \frac{2}{x-1} - 3 = \frac{2-3(x-1)}{x-1} = \frac{5-3x}{x-1}$$

Ejemplo Si f es una función par y g es una función par se tiene

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) \underbrace{=}_{f(x)=f(-x)} g(f(x)) = g \circ f(x)$$

por lo tanto $g \circ f(x)$ es una función par

Ejemplo Si f es una función impar y g es una función impar se tiene

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) \underbrace{=}_{f(-x)=-f(x)} g(-f(x)) \underbrace{=}_{-g(x)=g(-x)} -g(f(x)) = -g \circ f(x)$$

por lo tanto $g \circ f(x)$ es una función impar

Teorema 1. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es inyectiva*

Demostración. sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tal que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ se tiene entonces que

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

como g es inyectiva se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$ y como f es inyectiva entonces $x_1 = x_2$ $\therefore$ $g \circ f$ es inyectiva □

Teorema 2. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones suprayectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva*

Demostración. Hay que probar que $\forall z \in C$ $\exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$, se tiene que por ser $g : B \to C$ sobre $\exists y \in B$ tal que $\forall z \in C$ $g(y) = z$ dado que f es suprayectiva y $y \in B$ $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ por lo tanto $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Por lo tanto dado $z \in C$ $\exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$ □

Propiedades de la Composición de Funciones

Propiedad Asociativa Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ entonces $h : A \to D$. Entonces se verfica

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Comprobación Tenemos que

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

por otra parte

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

por lo tanto

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Imagenes de funciones

Sean $f : X \to Y$ y $A \subseteq X$. Las imagenes de todos los elementos de A determinan un subconjunto de Y llamado imagen de A por f.

Definición 3. *La imagen del subconjunto $A \subseteq Y$ es el conjunto cuyos elementos son las imagenes de los elementos de A.*

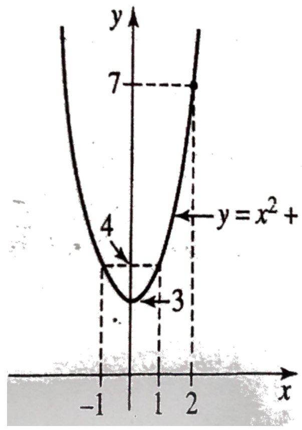
$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Ejemplo *Consideremos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por*

$$f(x)=x^2+3$$

Sea $A=[-1,2]$, en este caso se tiene que

$$f([-1,2])=[3,7]$$



Propiedades de la Imagen

Proposición 1. *a) Si $f:X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset X$ y si $A\subset B$ entonces $f(A)\subset f(B)$*

Demostración. Sea $z\in f(a)\Rightarrow \exists x\in A$ tal que $f(x)=z\Rightarrow \exists x\in B$ tal que $f(x)=z$ $A\subset B\Rightarrow z\in f(B)$ $\therefore f(A)\subset f(B)$ □

Proposición 2. *a) Si $f:X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset X$ se tiene entonces que $f(A\bigcup B)=f(A)\bigcup f(B)$*

Demostración. Sea $z\in f(A\bigcup B)\Rightarrow \exists x\in A\bigcup B$ tal que $f(x)=z\Rightarrow \exists x\in B$ *ó* $x\in A$ tal que $f(x)=z$ $\Rightarrow \exists x\in B$ *y* $f(x)=z$ ó $\exists x\in A$ *y* $f(x)=z$ $\therefore z\in f(B)$ ó $z\in f(A)\Rightarrow z\in f(a)\bigcup f(B)$ $\therefore$ $f(A\bigcup B)\subset f(A)\bigcup f(B)$
Por otro lado

$$A\subset A\bigcup B\Rightarrow f(A)\subset f(A\bigcup B)$$

$$B\subset A\bigcup B\Rightarrow f(B)\subset f(A\bigcup B)$$

$$\Rightarrow f(A)\bigcup f(B)\subset f(A\bigcup B)$$

□

Proposición 3. *a) Si $f:X\to Y$, $A\subset X$, $B\subset X$ se tiene entonces que $f(A\bigcap B)\subset f(A)\bigcap f(B)$*

Demostración. Sea $z\in f(A\bigcap B)\Rightarrow \exists x\in A\bigcap B$ tal que $f(x)=z\Rightarrow \exists x\in B$ *y* $x\in A$ tal que $f(x)=z$ $\Rightarrow \exists x\in B$ *y* $f(x)=z$ y $\exists x\in A$ *y* $f(x)=z$ $\therefore z\in f(B)$ y $z\in f(A)\Rightarrow z\in f(a)\bigcap f(B)$ $\therefore$ $f(A\bigcap B)\subset f(A)\bigcap f(B)$ □

En el siguiente ejemplo se ilustra $f(A\bigcap B)\neq f(A)\bigcap f(B)$
Sean los conjuntos A,B tal que

$$A=\{-2,-3,4\}\quad B=\{2,3,4,5\}\Rightarrow A\bigcap B=\{4\}\quad f(A\bigcap B)=\{16\}$$

Por otro lado

$$f(A)\bigcap f(B)=\{4,9,16\}\bigcap\{4,9,16,25\}=\{4,9,16\}$$

y resulta que

$$f(A\bigcap B)=\{16\}\neq\{4,9,16\}=f(A)\bigcap f(B)$$

Imagenes inversas de funciones

Sean $f:X\to Y$ y A una parte del codominio Y. Imagen inversa ó preimagen del subconjunto $A\subset Y$, es el conjunto de los elementos del dominio cuyas imagenes pertenecen a A

$$f^{-1}(A)=\{x\in X|f(x)\in A\}$$

las siguientes afirmaciones son claras

$$Si\quad x\in f^{-1}(A)\Rightarrow f(x)\in A$$

$$Si\quad f(x)\in A\Rightarrow x\in f^{-1}(A)$$

Es decir, un elemento del dominio pertenece a la preimagen de A, si y solo si su imagen pertenece a A.

Ejemplo Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2$. Determine las preimagenes de los siguientes subconjuntos del codominio $[4,9]$

Solución Para el conjunto $[4,9]$ se tiene que

$$f^{-1}[4,9]=\{x\in\mathbb{R}|f(x)\in[4,9]\}$$

Ahora bien

$$f(x)\in[4,9]\Leftrightarrow x^2\in[4,9]\Leftrightarrow 4\leq x^2\leq 9\Leftrightarrow 2\leq|x|\leq 3\Leftrightarrow$$

$$2\leq x\leq 3\quad \text{Ó}\quad 2\leq -x\leq 3\Leftrightarrow x\in[2,3]\quad \text{Ó}\quad x\in[-3,-2]$$

resulta entonces que

$$f^{-1}[4,9]=[-3,-2]\bigcup[2,3]$$