Imagenes inversas de funciones

Sean $f : X \to Y$ y A una parte del codominio Y. Imagen inversa ó preimagen del subconjunto $A \subset Y$, es el conjunto de los elementos del dominio cuyas imagenes pertenecen a A

$$f^{-1}(A) = \{x \in X | f(x) \in A\}$$

las siguientes afirmaciones son claras

$$Si \quad x \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(x) \in A$$

$$Si \quad f(x) \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$$

Es decir, un elemento del dominio pertenece a la preimagen de A, si y solo si su imagen pertenece a A.

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Determine las preimagenes de los siguientes subconjuntos del codominio $[4, 9]$

Solución Para el conjunto $[4, 9]$ se tiene que

$$f^{-1}[4, 9] = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in [4, 9]\}$$

Ahora bien

$$f(x) \in [4, 9] \Leftrightarrow x^2 \in [4, 9] \Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9 \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$2 \leq x \leq 3 \quad \text{Ó} \quad 2 \leq -x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [2, 3] \quad \text{Ó} \quad x \in [-3, -2]$$

resulta entonces que

$$f^{-1}[4, 9] = [-3, -2] \bigcup [2, 3]$$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Determine las preimagenes de los siguientes subconjuntos del codominio

$$(-\infty, -1], \quad (-1, 1], \quad (-1, 1)$$

Solución Para el conjunto $(-\infty, -1]$ se tiene que

$$f^{-1}(-\infty, -1] = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in (-\infty, -1]\}$$

Ahora bien

$$f(x) \in (-\infty, -1] \Leftrightarrow x^2 \leq -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

resulta entonces que

$$f^{-1}(-\infty, -1] = \emptyset$$

Para el conjunto $(-1, 1]$ se tiene que

$$f^{-1}(-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in (-1, 1]\}$$

Ahora bien

$$f(x) \in (-1, 1] \Leftrightarrow x^2 \in (-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

resulta entonces que

$$f^{-1}(-1,1] = [-1,1]$$

Para el conjunto $(-1,1)$ se tiene que

$$f^{-1}(-1,1) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in (-1,1)\}$$

Ahora bien

$$f(x) \in (-1,1) \Leftrightarrow x^2 \in (-1,1) \Leftrightarrow -1 < x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$$

resulta entonces que

$$f^{-1}(-1,1) = (-1,1)$$

Proposición 1. *Si $f : X \to Y$, $A \subset Y$, $B \subset Y$ se tiene entonces que $f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$*

Demostración. Sea

$$z \in f^{-1}(A \bigcup B) \Leftrightarrow f(x) \in (A \bigcup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \quad \acute{O} \quad f(x) \in B \Leftrightarrow$$

$$x \in f^{-1}(A) \quad \acute{o} \quad x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$$

□

Proposición 2. *Si $f : X \to Y$, $A \subset Y$, $B \subset Y$ se tiene entonces que $f^{-1}(A \bigcap B) = f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$*

Demostración. Sea

$$z \in f^{-1}(A \bigcap B) \Leftrightarrow f(x) \in (A \bigcap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \quad y \quad f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \quad y \quad x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow$$

$$x \in f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$$

□

Proposición 3. *Si $f : X \to Y$, $A \subset Y$, $B \subset Y$ se tiene entonces que $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$*

Demostración. Sea

$$z \in f^{-1}(A^c) \Leftrightarrow f(x) \in A^c \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \left(f^{-1}(A)\right)^c$$

□

Función Biyectiva

Definición 1. *Una función $f : A \to B$ se dice que es biyectiva si es inyectiva y suprayectiva*

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Muestre que f es biyectiva

Solución

Para ver que f es inyectiva
Sean $x_1, x_2 \in D(f)$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$ es decir

$$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow (x_1^3 - x_2^3) = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x - 2^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \quad o \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

Si $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$, ahora bien si $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$ se tiene que

$$x_1 = \frac{-x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 4x_2^2}}{2} = \frac{-x_2 \pm \sqrt{-3x_2^2}}{2} = x_2\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

por lo tanto si $x_2 = 0$ entonces $x_1 = 0$ y por tanto $x_1 = x_2$
Para ver que es suprayectiva
Sea $y \in C(f)$ entonces

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; x^3 = y \quad\Rightarrow\quad x = \sqrt[3]{y} \;\; y \;\; f(x) = f(\sqrt[3]{y}) = (\sqrt[3]{y})^3 = y$$

Definición 2. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cualquiera. La función identidad en A es la función $I_A : A \to A$ definida por la regla de correspondencia*

$$\forall\, x \;\in\; A, \quad I_A(x) = x$$

Teorema 1. *Sean A,B conjuntos arbitrarios. La función identidad en A, $I_A : A \to A$, satisface*

$$(a) \quad \forall f : A \to B, \quad f \circ I_A = f$$

$$(b) \quad \forall g : B \to A, \; I_A \circ g = g$$

Demostración.

$$(a) \;\; \forall\, a \in\; A, \; (f \circ I_A)(a) = f(I_A(a)) = f(a) \quad \therefore \quad f \circ I_A = f$$

$$(b) \;\; \forall\, b \in\; B, \; (I_A \circ g)(b) = I_A(g(b)) = g(b) \quad \therefore \quad I_A \circ g = g$$

□

Teorema 2. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es inyectiva entonces f es inyectiva*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in A$ tal que $x_1 \neq x_2$, al ser $g \circ f$ inyectiva se tiene $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ es decir $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ esto solo puede suceder si $f(x_1) \neq f(x_2)$ en consecuencia f es inyectiva □

Teorema 3. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva entonces g es suprayectiva*

Demostración. Sea $c \in C$ como $g \circ f$ es suprayectiva, existe α tal que

$$c = g \circ f(\alpha) = g(f(\alpha))$$

esto prueba que $c \in Im_g$ $\square$

Definición 3. *Suponga que $f : A \to B$. Si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ y $f \circ g = I_B$, entonces decimos que f es invertible y a la función g la llamamos la función inversa de la función f. La denotamos*

$$g = f^{-1}$$

Teorema 4. *Una función $f : A \to B$ es invertible si y solo si es inyectiva y suprayectiva*

Demostración. $\Rightarrow$
Supongamos que $f : A \to B$ es invertible. Entonces existe una función $g : B \to A$ tal que

$$g \circ f = I_A \quad y \quad f \circ g = I_B$$

(1) Como la función I_A es inyectiva entonces $g \circ f$ es inyectiva por lo tanto f es inyectiva
(2) Como la función I_B es sobreyectiva entonces $f \circ g$ es sobreyectiva por lo tanto f es sobreyectiva.

$\Leftarrow$
Supongamos que $f : A \to B$ es inyectiva y sobre. Sea $b \in B$. Como f es sobre, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Además dado que f es inyectiva solo hay un $a \in A$. Definimos

$$g(b) = a$$

Entonces

$$\forall\ a \in A, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a = I_A$$

También

$$\forall\ b \in B, \ (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b = I_B$$

. Tenemos entonces que

$$g \circ f = I_A \quad y \quad f \circ g = I_B$$

Por lo tanto f es invertible. $\square$

Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x+2$ admite inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x-2$ pues

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2) - 2 = x = Id_{\mathbb{R}}$$
$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x-2) = (x-2) + 2 = x = Id_{\mathbb{R}}$$

Corolario 1. *Si $f : A \to B$ es inyectiva y suprayectiva entonces $f^{-1} : B \to A$ también es inyectiva y suprayectiva*

Demostración. Tenemos que

$$f \circ f^{-1} = I_B \ \ la \ \ cual \ \ es \ \ inyectiva \ \ \therefore \ \ f \circ f^{-1} \ \ es \ \ inyectiva \ \ \therefore \ \ f^{-1} \ \ es \ \ inyectiva$$

$$f^{-1} \circ f = I_A \ \ la \ \ cual \ \ es \ \ sobreyectiva \ \ \therefore \ \ f^{-1} \circ f \ \ es \ \ sobreyectiva \ \ \therefore \ \ f^{-1} \ \ es \ \ sobreyectiva$$

$\square$