Raíz N-ésima

Teorema 1. *$\forall\ x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$ y cada $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > 0$ existe un $y \in \mathbb{R}$, y solo uno, tal que $y^n = x$*
Este número y se denota $\sqrt[n]{x}$, o $x^{\frac{1}{n}}$

Demostración. Sea E el siguiente conjunto

$$E = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0 \ \ y \ \ t^n < x\}$$

Tenemos que $t = 0 \in E$ pues $0^n < x$ por lo tanto $E \neq \emptyset$.
Por otro lado vamos a demostrar un pequeño resultado por inducción

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \ \ se \ \ satisface \ \ (x+1)^n > x$$

Primero comprobamos la base de inducción
n=1
Se tiene

$$x + 1 > x$$

por tanto se cumple para $n = 1$
Vamos a suponer que la propiedad es válida para $n = k$, es decir

$$(x+1)^k > x$$

A partir de ahi se tiene

$$(x+1)^k > x \ \Rightarrow \ (x+1)^k(x+1) > x(x+1) = x^2 + x > x \ \Rightarrow \ (x+1)^{k+1} > x$$

y por lo tanto la propiedad es válida para $n = k + 1$ en consecuencia la propiedad es válida $\forall\ n \in \mathbb{N}$
Ahora bien

$$Si \ \ t \geq (x+1) \ \ entonces \ \ t^n \geq (x+1)^n > x, \ \ por \ \ lo \ \ tanto \ \ t \notin E$$

de manera que $x + 1$ es una cota superior de E. Por lo tanto

$$E \neq \emptyset \ \ y \ \ E \ \ esta \ \ acotado \ \ superiormente \ \ por \ \ x+1 \ \ por \ \ tanto \ \ \exists \sup \ E = y$$

Vamos a probar que $y^n = x$
Procedemos por contradicción, es decir supondremos que $y^n < x$ y es este caso
(1) La identidad

$$b^n - a^a = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \cdots + a^{n-1})$$

para $0 < a < b$ nos da la desigualdad

$$b^n - a^n < (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}b + b^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}) = (b-a)nb^{n-1}$$

Considermos un $h \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < h < 1 \quad y \quad h < \frac{x - y^n}{n(y+1)^{n-1}}$$

sustituimos

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1} \underbrace{\Rightarrow}_{b=y+h,\quad a=y} (y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1}$$

además

$$h < 1 \;\Rightarrow\; y+h < y+1 \;\Rightarrow\; (y+h)^{n-1} < (y+1)^{n-1} \;\Rightarrow\; nh(y+h)^{n-1} < nh(y+1)^{n-1}$$

por lo que

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < nh(y+1)^{n-1}$$

por otro lado

$$h < \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}} \;\Rightarrow\; hn(y+1)^{n-1} < x - y^n$$

y de esta manera

$$(y+h)^n - y^n < hn(y+h)^{n-1} < nh(y+1)^{n-1} < x - y^n \;\Rightarrow\; (y+h)^n - y^n < x - y^n \;\Rightarrow\; (y+h)^n < x$$

en consecuencia $y+h \in E$, pero $y+h > y$ lo cual es una contradicción pues $y = \sup E$ y por tanto $y \geq x, \quad \forall x \in E$ por lo que $y^n < x$ no ocurre.
Supongamos ahora que $y^n > x$ y consideremos

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}}$$

dado que

$$\frac{y^n - x}{ny^{n-1}} < y \;\Leftrightarrow\; y^n - x < ny^n$$

por lo que

$$0 < k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}} < y, \quad es \;\; decir \;\; 0 < k < y$$

Si $t \geq y - k$ entonces

$$y - k \leq t \;\Rightarrow\; (y-k)^n \leq t^n \;\Rightarrow\; -t^n \leq -(y-k)^n \;\Rightarrow\; y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n$$

de la desigualdad

$$b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1} \underbrace{\Rightarrow}_{b=y \quad a=y-k} y^n - (y-k)^n < kny^{n-1}$$

y la igualdad

$$k = \frac{y^n - x}{ny^{n-1}} \;\Rightarrow\; kny^{n-1} = y^n - x$$

se tiene

$$y^n - t^n \leq y^n - (y-k)^n < kny^{n-1} = y^n - x$$

por lo tanto

$$y^n - t^n < y^n - x \;\Rightarrow\; -t^n < -x \;\Rightarrow\; t^n > x$$

por lo tanto $t \notin E$. Por lo que $y - k$ es una cota superior de E, pero $y - k < y$ lo cual es una contradicción pues $y = \sup E$ es la mínima cota superior de E, por lo que $y^n > x$ no ocurre.
Por lo tanto la única posibilidad que ocurre es $y^n = x$ $\square$

Corolario 1. *Si a, b son números reales positivos y n es un entero positivo entonces*

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$$

Demostración. Haciendo $x = a^{\frac{1}{n}}$, $y = b^{\frac{1}{n}}$. Se tiene

$$a \cdot b = x^n y^n = (xy)^n \;\Rightarrow\; (ab)^{\frac{1}{n}} = x \cdot y = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$$

□

Exponentes Racionales

Definición 1. *Si r es un número racional positivo, sea $r = \dfrac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos, se define*

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{como el único} \quad (x^r)^n = x^m$$

es decir como la raíz n-ésima de x^m siempre que ésta exista.
Es decir existe un $y^n \in \mathbb{R}$ tal que $y^n = x^m$.

Teorema 2. *Sean $a, b \in \mathbb{Q}$ y $r, s > 0$. Entonces se cumple*

$$(1) \quad r^{a+b} = r^a r^b$$
$$(2) \quad (r^a)^b = r^{ab}$$
$$(3) \quad (rs)^a = r^a s^a$$

Demostración. Para (1) tomamos $m, p \in \mathbb{Q}$ y $n, q \in \mathbb{N}$ tal que $a = \dfrac{m}{n}$ *y* $b = \dfrac{p}{q}$. Entonces se tiene

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

por lo tanto r^{a+b} es el único número que satisface

$$(r^{a+b})^{nq} = r^{mq+np}$$

por otro lado

$$(r^a r^b)^{nq} = (r^a)^{nq} (r^b)^{nq} = ((r^a)^n)^q \left((r^b)^q \right)^n \underbrace{=}_{\substack{r^a = r^{\frac{m}{n}} \Rightarrow (r^a)^n = r^m \\ r^b = r^{\frac{p}{q}} \Rightarrow (r^b)^q = r^p}} (r^m)^q (r^p)^n = r^{mq} r^{pn} = r^{mq+pn}$$

y por unicidad de la raíz n-ésima se tiene

$$r^a r^b = r^{a+b}$$

Para (2) tomamos $m, p \in \mathbb{Q}$ y $n, q \in \mathbb{N}$ tal que $a = \dfrac{m}{n}$ *y* $b = \dfrac{p}{q}$. Entonces se tiene

$$ab = \frac{m}{n}\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

por lo tanto r^{ab} es el único número que satisface

$$(r^{ab})^{nq} = r^{mp}$$

por otro lado

$$((r^a)^b)^{nq} = (((r^a)^b)^q)^n \underbrace{=}_{r^b = r^{\frac{p}{q}} \Rightarrow (r^b)^q = r^p} (((r^a)^p)^n = (((r^a)^n)^p \underbrace{=}_{r^a = r^{\frac{m}{n}} \Rightarrow (r^a)^n = r^m} (r^m)^p = r^{mp}$$

y por unicidad de la raíz n-ésima se tiene

$$(r^a)^b = r^{ab}$$

Para (3) tomamos $m, p \in \mathbb{Q}$ y $n, q \in \mathbb{N}$ tal que $a = \dfrac{m}{n}$ *y* $b = \dfrac{p}{q}$. Entonces se tiene $(rs)^a$ es el único número que satisface

$$((rs)^a)^n = (rs)^m$$

por otro lado

$$(r^a s^a)^n = (r^a)^n (s^a)^n \underbrace{=}_{r^a = r^{\frac{m}{n}} \Rightarrow (r^a)^n = r^m} r^m s^m = (rs)^m$$

y por unicidad de la raíz n-ésima se tiene

$$(rs)^a = r^a s^a$$

□