Función Potencial

Para $x \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(x) = x^n$ es una función creciente. Ahora bien la función $g(x) = \sqrt[n]{x}$ es tal que

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[n]{x}) = f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

por otro lado

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^n) = \sqrt[n]{x^n} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

de manera que la función g es la función inversa de f.
Por otro lado sean $y_1,\ y_2 \in R(f)$ tal que $y_1 < y_2$. Tenemos que existen dos únicos puntos $x_1,\ x_2$ tal que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$ entonces

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \ \Rightarrow\ x_1 \geq x_2 \ \Rightarrow y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2 \ \ \textit{lo cual es una contradicción}$$

$\therefore\ f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ y por lo tanto f^{-1} es estrictamente creciente

Teorema 1. *Sea $x > 1$ y $a \geq b$ entonces se cumple $x^a \geq x^b$*

Demostración. Supongamos que $x > 1$ y $a \geq 0$ con $a = \dfrac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces si

$$x^a \leq 1 \ \Rightarrow\ x^{\frac{m}{n}} \leq 1 \ \Rightarrow\ x^m \leq 1^n = 1, \ \ \textit{lo cual es una contradición}$$

por lo tanto $x^a > 1$.
Ahora bien si $a \geq b$ se tiene que $a - b \geq 0$ por lo que $x^{a-b} \geq 1$ muttiplicando por x^b se tiene

$$x^{a-b} \geq 1 \ \Rightarrow\ x^b x^{a-b} \geq 1(x^b) \ \Rightarrow\ x^{b+(a-b)} \geq x^b \ \Rightarrow\ x^a \geq x^b$$

□

Teorema 2. *Sea $0 < x < 1$ y $a \geq b$ entonces se cumple $x^a \leq x^b$*

Demostración. Tenemos que

$$x < 1 \ \Rightarrow\ x^a \left(\frac{1}{x}\right)^a = 1 \ \Rightarrow\ x^{-a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a$$

$$x < 1 \ \Rightarrow\ x^b \left(\frac{1}{x}\right)^b = 1 \ \Rightarrow\ x^{-b} = \left(\frac{1}{x}\right)^b$$

de manera que

$$\frac{1}{x} > 1 \ \Rightarrow\ x^{-a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a \geq \left(\frac{1}{x}\right)^b = x^{-b}$$

multiplicando por $x^a x^b$ ambos lados

$$x^{-a} \geq x^{-b} \ \Rightarrow\ x^{-a}x^a x^b \geq x^{-b}x^a x^b \ \Rightarrow\ x^b \geq x^a$$

□

Teorema 3. *Sea $x < y$ y $a > 0$ entonces se cumple $x^a < y^a$*

Demostración. Sea $a = \dfrac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces si $x^a \geq y^a$ se tiene

$$x^m = (x^a)^n \geq (y^a)^n = y^m \text{ } (Esto\ es\ una\ contradicción) \text{ } pues\ x^m < y^m$$

por lo tanto

$$x^a < y^a$$

□

Teorema 4. *Sea $x < y$ y $a < 0$ entonces se cumple $x^a > y^a$*

Demostración. Sea $a = \dfrac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene entonces que

$$x < y \;\Rightarrow\; \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; y^a = \left(\frac{1}{y}\right)^{-a} < \left(\frac{1}{x}\right)^{-a} = x^a$$

$$x^a > y^a$$

□

Estos resultados muestran que la función potencia $f : \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R}$ para un número real $a > 1$ dada por $f(x) = a^x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{Q}$ y para cada número real $0 < a < 1$ la función $f(x) = a^x$ es estrictamente decreciente en $\mathbb{Q}$

Definición 1. *Sea $a > 0$, $a \neq 1$ definimos la función logaritmo base a*

$$f(x) = \log_a x$$

como la función inversa de la función

$$g(x) = a^x$$

esto es

$$y = \log_a x \;\Leftrightarrow\; a^y = x$$

Teorema 5. *Sea $a > 0$ y $a \neq 1$ La función $f(x) = \log_a(x)$ tiene las siguientes propiedades*
(a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
(b) f es uno-uno en $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$
(c) f es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$
(d) $\log_a 1 = 0$
(e) Suponga que $a > 1$. Entonces $\log_a x > 0$ si $x > 1$, y $\log_a x < 0$ si $0 < x < 1$
(f) Suponga que $0 < a < 1$. Entonces $\log_a x < 0$ si $x > 1$, y $\log_a x > 0$ si $0 < x < 1$
(g) $\forall\ x \in \mathbb{Q}, \quad \log_a(a^x) = x$
(h) $\forall\ x > 0, \ a^{\log_a x} = x$

Demostración.

$$(a) \quad f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \ \ por \ \ definición \ \ de \ \ inversa$$

$$(b) \quad f \ \ es \ \ uno-uno \ \ por \ \ definición \ \ de \ \ inversa$$

$$(c) \quad g(x) = a^x, \quad \textit{es creciente si } a > 1 \textit{ y decreciente si } 0 < a < 1$$

Por tanto $f = g^{-1}$ tiene la misma propiedad.

$$(d) \quad a^0 = 1 \;\Rightarrow\; g(0) = 1 \;\Rightarrow\; g^{-1}(1) = 0 \;\Rightarrow\; f(1) = 0$$

(e) *Supongamos que* $a > 1$. *como* $\log_a$ *es estrictamente creciente entonces* $x > 1 \;\Rightarrow\; \log_a x > \log_a 1 = 0$

$$(f) \quad \textit{Supongamos que } 0 < a < 1. \textit{ como } \log_a \textit{ es estrictamente decreciente entonces}$$

$$x < 1 \;\Rightarrow\; \log_a x < \log_a 1 = 0$$

$$(g) \quad a^x > 0 \textit{ y } \log_a(a^x) = f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$$(h) \quad a^{\log_a(x)} = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

□

Proposición 1. *Sea* $a > 0$, $a \neq 1$. *La función* $f(x) = \log_a x$ *satisface las siguientes propiedades* $\forall\, x, y > 0$ *y* $r \in \mathbb{Q}$
(a) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
(b) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
(c) $\log_a \left(\dfrac{1}{x}\right) = -\log_a x$
(c) $\log_a x^r = r \log_a x$

Demostración. para el inciso (a) hacemos $z_1 = \log_a x$ y $z_2 = \log_a y$ por lo tanto

$$z_1 = \log_a x \;\Rightarrow\; a^{z_1} = x \quad y \quad z_2 = \log_a y \;\Rightarrow\; a^{z_2} = y$$

por lo tanto

$$xy = a^{z_1} \cdot a^{z_2} = a^{z_1 + z_2} \;\Rightarrow\; \log_a xy = z_1 + z_2 \;\Rightarrow\; \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

para el inciso (b) hacemos $z_1 = \log_a x$ y $z_2 = \log_a y$ por lo tanto

$$z_1 = \log_a x \;\Rightarrow\; a^{z_1} = x \quad y \quad z_2 = \log_a y \;\Rightarrow\; a^{z_2} = y$$

por lo tanto

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{z_1}}{a^{z_2}} = a^{z_1 - z_2} \;\Rightarrow\; \log_a \frac{x}{y} = z_1 - z_2 \;\Rightarrow\; \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

para el inciso (c)

$$\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$$

para el inciso (d) Hacemos primero

$$\log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$$

para comprobar esto se tiene

$$\log_a x^{\frac{1}{n}} = z_1 \;\Rightarrow\; a^{z_1} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \textit{como} \quad (a^{z_1}) = x^{\frac{1}{n}} \quad \textit{entonces} \quad (a^{z_1})^n = x$$

por lo tanto

$$\log_a x = \log_a (a^{z_1})^n = \log_a a^{z_1} \cdot a^{z_1} \cdots a^{z_1} = \log_a \underbrace{a^{z_1} + \log_a a^{z_1} + \cdots \log_a a^{z_1}}_{n-veces} = n \log_a a^{z_1} = nz_1$$

es decir

$$\log_a x = nz_1 \;\Rightarrow\; \log_a x = n \log_a x \frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} \log_a x$$

Veamos ahora

$$\log_a x^r = \log_a x^{\frac{m}{n}} = \log_a (x^{\frac{1}{n}})^m = \underbrace{\log_a x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}} \cdots x^{\frac{1}{n}}}_{m-veces} =$$

$$\underbrace{\log_a x^{\frac{1}{n}} + \log_a x^{\frac{1}{n}} + \cdots \log_a x^{\frac{1}{n}}}_{m-veces} = \underbrace{\frac{1}{n} \log_a x + \frac{1}{n} \log_a x + \cdots \frac{1}{n} \log_a x}_{m-veces} = m \left(\frac{1}{n} \log_a x \right) = \frac{m}{n} \log_a x = r \log_a x$$

□

Proposición 2. *Sean* $a, b > 0,\ a, b \neq 1$ *y* $x > 0$ *entonces*

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Demostración. Sean Sea $y = \log_b x$. Entonces $b^y = x$ por lo tanto

$$b^y = x \;\Rightarrow\; \log_a b^y = \log_a x \;\Rightarrow\; y \log_a b = \log_a x \;\Rightarrow\; \log_b x \log_a b = \log_a x \;\Rightarrow\; \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

□