Sucesiones parte 1

Definición 1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto*

$$\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, 4, ..., n\}$$

Estos conjuntos reciben el nombre de segmentos de $\mathbb{N}$.

Definición 2. *Un conjunto E es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ y una función $\varphi : E \to \mathbb{N}_n$ tal que φ es una biyección*

Este número natural n es el más pequeño tal que $\varphi : E \to \mathbb{N}_n$ es una biyección. Se denomina cardinal del conjunto finito E y se denota *card E*

Definición 3. *Se dice que un conjunto A es infinito si existe un subconjunto $B \subset A$ tal que $f : A \to B$ es una biyección*

Ejemplo Muestre que el conjunto de los números naturales es un conjunto infinito

Solución Para esto consideramos el subconjunto de los números naturales pares y definimos la función $f : \mathbb{N} \to$ *Pares* dada por $f(n) = 2n$ y vamos a comprobar que f es una biyección

f es inyectiva

Pues si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ son tal que $n_1 \neq n_2$ entonces

$$n_1 \neq n_2 \;\Rightarrow\; 2n_1 \neq n_2 \;\Rightarrow\; f(n_1) \neq f(n_2)$$

por lo tanto f es inyectiva

f es suprayectiva

si $y = 2n$ entonces $n = \dfrac{y}{2}$ de tal manera que

$$f(n) = f\left(\frac{2y}{2}\right) = y$$

Ejemplo Muestre que el conjunto de los numeros racionales $\mathbb{Q}$ es un conjnuto numerable

Solución Cada número racional se puede escribir, de manera única, en forma de fracción irreducible $\alpha = \dfrac{p}{q}$ $q > 0$.

Sea $h = |p| + q$ (llamada la altura del racional α). Es claro que el número de fracciones con la misma altura es finito.

Disponemos de todos los racionales según su altura

$$\left\{\frac{0}{1}\right\} \to 1$$

$$\left\{\frac{-1}{1}, \frac{1}{1}\right\} \to 2$$

siguiendo esta asignación, cada número racional tendrá entonces su número, esto es, habremos establecido una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$

Conjuntos Numerables

Definición 4. *Se dice que un conjunto A es numerable si existe una biyección $f : A \to \mathbb{N}$*

Ejemplo Muestre que el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ es numerable

Solución Consideremos la función

$$f(z) = \begin{cases} 2z+1 & si \quad z \geq 0 \\ 2|z| & si \quad z < 0 \end{cases}$$

para ver que es una biyección vamos a comprobar que f es inyectiva y suprayectiva
f es inyectiva
Suponga que $z_1, \; z_2 \in \mathbb{Z}$ son tal que $z_1 \cdot z_2 > 0$ es decir tienen el mismos signo y $z_1 \neq z_2$ entonces

$$z_1 \neq z_2 \;\Rightarrow\; 2z_1+1 \neq 2z_2+1 \;\Rightarrow\; f(z_1) \neq f(z_2)$$

por tanto f es inyectiva
Suponga que $z_1, \; z_2 \in \mathbb{Z}$ son tal que $z_1 \cdot z_2 < 0$ es decir tienen distinto signo y entonces

$$z_1 \neq z_2 \;\Rightarrow\; 2z_1+1 \neq 2|z_2| \;\; pues \;\; ambos \;\; son \;\; positivos \;\; pero \;\; 2z_1+1 \;\; es \;\; impar \;\; y \;\; 2|z_2| \;\; es \;\; par$$

por lo tanto f es inyectiva
f es suprayectiva
Tenemos que para $n \in \mathbb{N}$ y n par existe $z \in \mathbb{Z}$ con $z \leq 0$ tal que $n = 2|z|$
Tenemos que para $n \in \mathbb{N}$ y n impar existe $z \in \mathbb{Z}$ con $z > 0$ tal que $n = 2z+1$
por lo tanto f es suprayectiva, y en consecuencia f es una biyección de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$ y el conjunto de los números enteros es numerable

Sucesiones

Ejemplo Muestre usando inducción matemática que

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

Demostración. Tenemos que para $n = 1$

$$lado \;\; izquierdo \;\; 1 + r$$

$$lado \;\; derecho \;\; \frac{r^{2+1}-1}{r-1} = \frac{r^2-1}{r-1} = \frac{(r-1)(r+1)}{r-1} = r+1$$

por lo tanto la propiedad es válida para $n = 1$
Suponemos que la propiedad es válida para $n = k$ es decir

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

A aprtie de ahi se tiene

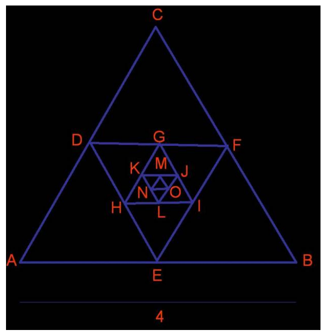
$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k + r^{k+1} = \frac{r^{k+1}-1}{r-1} + r^{k+1}$$

$$= \frac{r^{k+1} - 1 + (r-1)(r^{k+1})}{r-1} = \frac{r^{k+1} - 1 + r^{k+2} - r^{k+1}}{r-1} = \frac{r^{(k+1)+1} - 1}{r-1}$$

por lo que la propiedad es válida para $n = k + 1$ y por lo tanto es válida $\forall\ n \in \mathbb{N}$ □

Ejemplo Triángulos Anidados

En la siguiente figura aparecen los primero triángulos de un conjunto infinito de triángulos anidados. ¿Cuánto vale la suma p de los perímetros de "todos" los triángulos?



Como cada uno de los triángulos es equilátero y el lado del más grande mide 4, se deduce que la longitud de los triángulos que siguen es:

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^{n-1}}, ...$$

En consecuencia se obtiene

$$p = 3\left(4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...\right) = 21 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...\right)$$

Para la suma hasta el término n-ésimo se tiene

$$1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

si n es grande

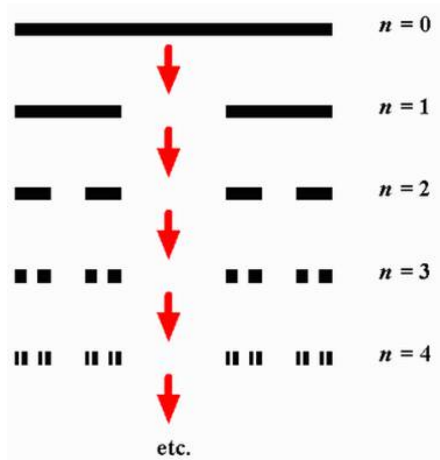
$$\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Por lo tanto

$$p = 21 + \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...\right) = 21 + \frac{3}{2}(2) = 24$$

Ejemplo Conjunto de Cantor

En la figura aparecen los primeros pasos del proceso infinito de construcción de un conjunto que se conoce como conjunto de Cantor, en honor del matemático alemán George Cantor (18451918),cuya construcción se "hace"quitando el segmento central sin sus extremos de los tres que resultan al dividir un segmento dado en tres partes iguales y después sucesivamente se aplica el mismo procedimiento con los segmentos que van sobreviviendo.



Se define al conjunto de cantor como

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

¿Cuál es la longitud del conjunto de Cantor si la longitud del segmento original es 1?
En cada etapa de la construcción del conjunto de Cantor, al segmento inicial sucesivamente se le quitan

$$2, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^{n-1}, ...$$

segmentos, cada uno de ellos de longitud igual a

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, ..., \frac{1}{3^n}, ...$$

respectivamente.
Por lo tanto la longitud del conjunto de Cantor es

$$\ell = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2^2}{3^3} + ...\right) = 1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + ...\right) =$$

hasta el término n-ésimo la suma es igual a:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + ... + \frac{2^n}{3^n} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

y cuando n es grande

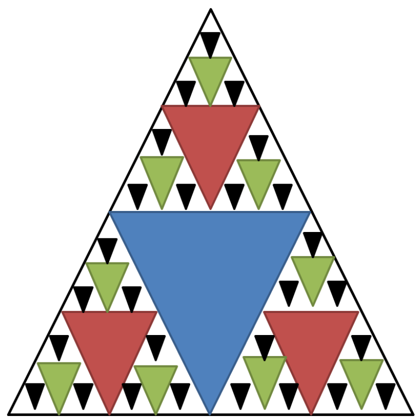
$$\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

Por lo tanto

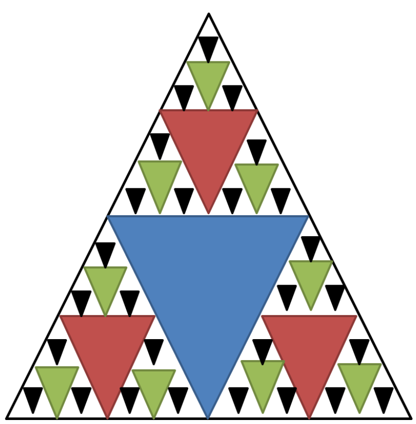
$$\ell = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2^2}{3^3} + \ldots\right) = 1 - \frac{1}{3}(3) = 0$$

Ejemplo Triángulos de Sierpinsky

El matemático polaco Waclaw Sierpinski introdujo este fractal en 1919. Partamos (iteración n=0) de la superficie de un triángulo equilátero de lado unidad. Seguidamente (iteración n=1) tomemos los puntos medios de cada lado y construyamos a partir de ellos un triángulo equilátero invertido de lado 1/2. Lo recortamos. Ahora (iteración n=2) repetimos el proceso con cada uno de los tres triángulos de lado 1/2 que nos quedan. Así que recortamos, esta vez, tres triángulos invertidos de lado 1/4. En la figura observamos hasta cinco iteraciones sucesivas. Si repetimos infinitamente el proceso obtendremos una figura fractal denominada triángulo de Sierpinski.



Si en cada iteración de la construcción se quita el área del triángulo construido, ¿Cuánto vale la suma de las áreas que se quitaron?

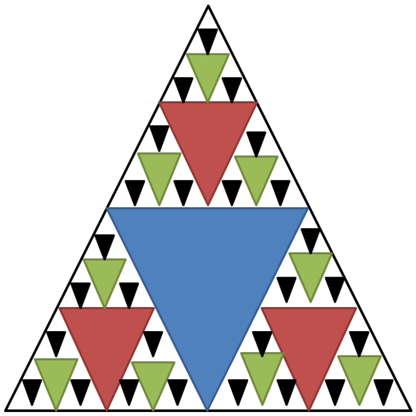


En la primera iteración se tienen 4 triángulos de área:

$$A_1 = \frac{1}{4}\, A_t$$

En la segunda iteración se tienen 3 triángulos de área:

$$A_2 = 3\frac{1}{16}\, A_t$$



En la cuarta iteración se tienen 9 triángulos de área:

$$A_3 = 9\frac{1}{64}\ A_t$$

En la quinta iteración se tienen 27 triángulos de área:

$$A_2 = 27\frac{1}{256}\ A_t$$

Siguiendo este proceso se tiene que la suma de las áreas que se quitaron es

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4}\ A_t + 3\frac{1}{16}\ A_t + 9\frac{1}{64}\ A_t + 27\frac{1}{256}\ A_t + ... \\ &= \frac{1}{4}\ A_t\left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + ...\right) \\ &= \frac{1}{4}\ A_t\left(\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}\right) = A_t\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

por lo que el área que swe quito hasta el paso n-ésimo es

$$A_t\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

Por lo que si n es suficientemente grando se tiene que el área que se quito es

$$A_t\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \to A_t\,(1) = A_t$$