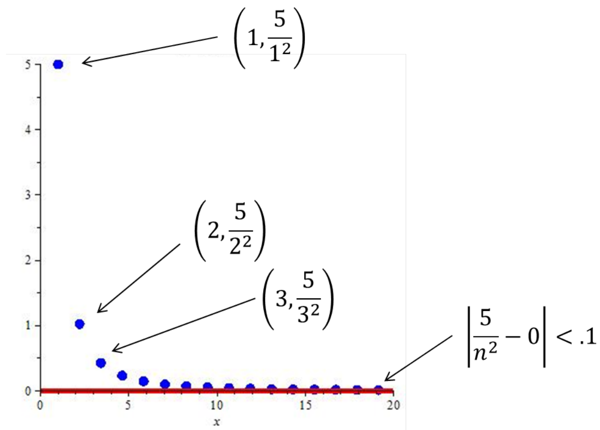
Sucesiones parte 2

Ejemplo Dado el conjunto

$$\{a_n\} = \left\{\frac{5}{n^2}\right\} = \{5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{1}{5}, \frac{5}{36}, \frac{5}{49}, ...\}$$



$$\left\{\frac{5}{n^2}\right\} = \left\{\frac{5}{1^2}, \frac{5}{2^2}, \frac{5}{3^2}, \dots, \frac{5}{n^2}\right\}$$

En la gráfica de los puntos de la sucesión, observamos que $a_n \to 0$ y nos preguntamos para cual $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left|\frac{5}{n^2} - 0\right| < ,1$$

en nuestro ejemplo tenemos que:

$$\left|\frac{5}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{5}{n^2}\right| = \frac{5}{n^2}$$

por lo que

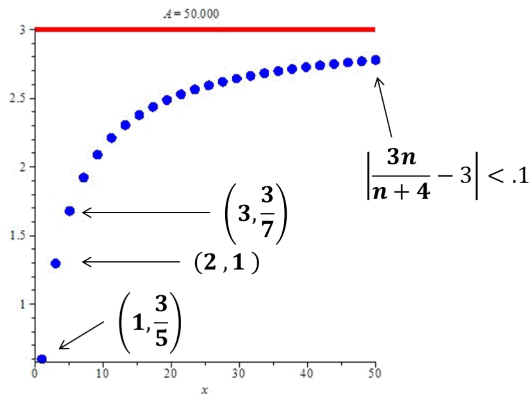
$$\frac{5}{n^2} < ,1 \;\Rightarrow\; \frac{5}{,1} < n^2 \;\Rightarrow\; 50 < n^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{50} < n \;\Rightarrow\; 7{,}07 < n$$

asi que para $n \in \mathbb{N}$ tal que $7{,}07 < n$ se cumple

$$\left|\frac{5}{n^2} - 0\right| < ,1$$

Ejemplo Dado el conjunto

$$\{a_n\} = \left\{\frac{3n}{n+4}\right\} = \left\{\frac{5}{3}, 1, \frac{9}{7}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{21}{11}, 2, \frac{27}{3}, \ldots\right\}$$



$$\{a_n\} = \left\{\frac{3n}{n+4}\right\}$$

En la gráfica de los puntos de la sucesión, observamos que $a_n \to 3$ y nos preguntamos para cual $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| < ,1$$

en nuestro ejemplo tenemos que:

$$\left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| = \left|\frac{3n - 3(n+4)}{n+4}\right| = \left|\frac{-12}{n+4}\right| = \frac{12}{n+4}$$

por lo que

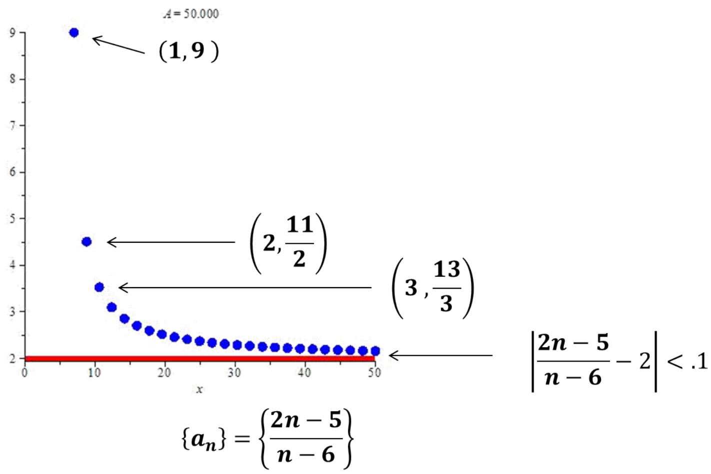
$$\frac{12}{n+4} < ,1 \;\Rightarrow\; \frac{12}{,1} < n+4 \;\Rightarrow\; 120 < n+4 \;\Rightarrow\; 116 < n$$

asi que para $n \in \mathbb{N}$ tal que $116 < n$ se cumple

$$\left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| < ,1$$

Ejemplo Dado el conjunto

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{2n-5}{n-6} \right\} = \left\{ 9, \frac{11}{2}, \frac{13}{3}, \frac{15}{4}, \frac{17}{5}, \frac{19}{6}, 3, \frac{23}{8}, \frac{25}{9}, \ldots \right\}$$



En la gráfica de los puntos de la sucesión, observamos que $a_n \to 2$ y nos preguntamos para cual $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left| \frac{2n-5}{n-6} - 2 \right| < ,1$$

en nuestro ejemplo tenemos que:

$$\left| \frac{2n-5}{n-6} - 2 \right| = \left| \frac{2n-5-2(n-6}{n-6} \right| = \left| \frac{7}{n-6} \right| = \frac{7}{n-6}$$

por lo que

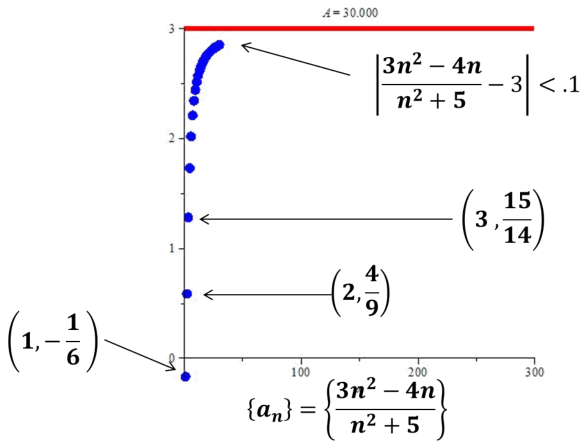
$$\frac{7}{n-6} < ,1 \;\Rightarrow\; \frac{7}{,1} < n-6 \;\Rightarrow\; 70 < n-6 \;\Rightarrow\; 76 < n$$

asi que para $n \in \mathbb{N}$ tal que $76 < n$ se cumple

$$\left| \frac{2n-5}{n-6} - 2 \right| < ,1$$

Ejemplo Dado el conjunto

$$\{a_n\} = \left\{\frac{3n^2 - 4n}{n^2 + 5}\right\} = \left\{-\frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{15}{14}, \frac{32}{21}, \frac{11}{6}, \frac{84}{41}, \frac{119}{54}, \dots\right\}$$



En la gráfica de los puntos de la sucesión, observamos que $a_n \to 3$ y nos preguntamos para cual $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left|\frac{3n^2 - 4n}{n^2 + 5} - 3\right| < ,1$$

en nuestro ejemplo tenemos que:

$$\left|\frac{3n^2 - 4n}{n^2 + 5} - 3\right| = \left|\frac{-4n - 15}{n^2 + 5}\right| = \left|\frac{4n}{n^2 + 5}\right| = \frac{4n + 15}{n^2 + 5}$$

por lo que

$$\frac{4n + 15}{n^2 + 5} < ,1 \;\Rightarrow\; \frac{4n + 15}{,1} < n^2 + 5 \;\Rightarrow\; 0 < n^2 - 40n - 145 \;\Rightarrow\; 43,3 < n$$

asi que para $n \in \mathbb{N}$ tal que $43{,}3 < n$ se cumple

$$\left|\frac{3n^2 - 4n}{n^2 + 5} - 3\right| < ,1$$

Ejemplo Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=0$$

Demostración. Necesitamos demostrar que
$$\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ N\in\mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ N\leq n\ \Rightarrow\ \left|\frac{5}{n^2}-0\right|<\epsilon$$
En este caso se tiene
$$\left|\frac{5}{n^2}-0\right|=\left|\frac{5}{n^2}\right|=\frac{5}{n^2}$$
por lo que
$$\frac{5}{n^2}<\epsilon\ \Rightarrow\ \frac{5}{\epsilon}<n^2\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{5}{\epsilon}}<n$$
ahora bien la propiedad arquimediana asegura que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\sqrt{\frac{5}{\epsilon}}<N$.
Por lo tanto
$$N\leq n\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{5}{\epsilon}}<n\ \Rightarrow\ \frac{5}{\epsilon}<n^2\ \Rightarrow\ \frac{5}{n^2}<\epsilon\ \Rightarrow$$
$$\left|\frac{5}{n^2}-0\right|<\epsilon$$
□

Ejemplo Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+4}=0$$

Demostración. Necesitamos demostrar que
$$\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ N\in\mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ N\leq n\ \Rightarrow\ \left|\frac{3}{n+4}-0\right|<\epsilon$$
En este caso se tiene
$$\left|\frac{3}{n+4}-0\right|=\left|\frac{3}{n+4}\right|=\frac{3}{n+4}$$
por lo que
$$\frac{3}{n+4}<\epsilon\ \Rightarrow\ \frac{3}{\epsilon}<n+4\ \Rightarrow\ \frac{3}{\epsilon}-4<n$$
ahora bien la propiedad arquimediana asegura que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{\epsilon}-4<N$.
Por lo tanto
$$N\leq n\ \Rightarrow\ \frac{3}{\epsilon}-4<n\ \Rightarrow\ \frac{3}{\epsilon}<n+4\ \Rightarrow\ \frac{3}{n+4}<\epsilon\ \Rightarrow$$
$$\left|\frac{3}{n+4}-0\right|<\epsilon$$
□

Ejemplo Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n^2+3} = 0$$

Demostración. Necesitamos demostrar que
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ N \leq n\ \Rightarrow\ \left|\frac{7n}{n^2+3} - 0\right| < \epsilon$$

En este caso se tiene
$$\left|\frac{7n}{n^2+3} - 0\right| = \left|\frac{7n}{n^2+3}\right| = \frac{7n}{n^2+3}$$

por lo que
$$\frac{7n}{n^2+3} < \frac{7n}{n^2} = \frac{7}{n}\ \Rightarrow\ \frac{7}{n} < \epsilon\ \Rightarrow\ \frac{7}{\epsilon} < n$$

ahora bien la propiedad arquimediana asegura que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{7}{\epsilon} < N$.
Por lo tanto
$$N \leq n\ \Rightarrow\ \frac{7}{\epsilon} < n\ \Rightarrow\ \frac{7}{n} < \epsilon\ \Rightarrow\ \frac{7n}{n^2} < \epsilon\ \Rightarrow\ \frac{7n}{n^2+3} < \epsilon\ \Rightarrow$$
$$\left|\frac{7n}{n^2+3} - 0\right| < \epsilon$$

□

Ejemplo Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{11}{1-n^2} = 0$$

Demostración. Necesitamos demostrar que
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ N \leq n\ \Rightarrow\ \left|\frac{11}{1-n^2} - 0\right| < \epsilon$$

En este caso se tiene
$$\left|\frac{11}{1-n^2} - 0\right| = \frac{11}{|1-n^2|} = \frac{11}{|n^2-1|} \underbrace{\leq}_{n>1} \frac{11}{n^2-1}$$

por lo que
$$\frac{11}{n^2-1} < \epsilon\ \Rightarrow\ \frac{11}{\epsilon} \underbrace{<}_{n>1} n^2 - 1\ \Rightarrow\ \frac{11}{\epsilon} + 1 \underbrace{<}_{n>1} n^2\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{11}{\epsilon} + 1} < n$$

ahora bien la propiedad arquimediana asegura que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt{\frac{11}{\epsilon} + 1} + 1 < N$.
Por lo tanto
$$N \leq n\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{11}{\epsilon} + 1} + 1 < n\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{11}{\epsilon} + 1} + 1 < n\ \ y\ \ 1 < n\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{11}{\epsilon} + 1} < n\ \ y\ \ 1 < n\ \Rightarrow$$

$$\frac{11}{\epsilon}+1<n^2 \;\; y \;\; 1<n \;\Rightarrow\; \frac{11}{\epsilon}<n^2-1 \;\; y \;\; 1<n \;\Rightarrow\; \frac{11}{n^2-1}<\epsilon \;\; y \;\; 1<n \;\;\Rightarrow$$
$$\frac{11}{|n^2-1|}|<\epsilon \;\Rightarrow\; \frac{11}{|1-n^2|}|<\epsilon \;\Rightarrow\; \left|\frac{11}{1-n^2}\right|<\epsilon \;\Rightarrow$$
$$\left|\frac{11}{1-n^2}-0\right|<\epsilon$$

□

Ejemplo Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+4}=3$$

Demostración. Necesitamos demostrar que
$$\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ N\in\mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ N\leq n\ \Rightarrow\ \left|\frac{3n}{n+4}-3\right|<\epsilon$$

En este caso se tiene
$$\left|\frac{3n}{n+3}-3\right|=\left|\frac{3n-3(n+4)}{n+4}\right|=\left|\frac{-12}{n+4}\right|=\frac{12}{n+4}$$

por lo que
$$\frac{12}{n+4}<\epsilon\ \Rightarrow\ \frac{12}{\epsilon}<n+4\ \Rightarrow\ \frac{12}{\epsilon}-4<n$$

ahora bien la propiedad arquimediana asegura que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $\dfrac{12}{\epsilon}-4<N$.
Por lo tanto
$$N\leq n\ \Rightarrow\ \frac{12}{\epsilon}-4<n\ \Rightarrow\ \frac{12}{\epsilon}<n+4\ \Rightarrow\ \frac{12}{n+4}<\epsilon\ \Rightarrow$$
$$\left|\frac{3n}{n+4}-3\right|<\epsilon$$

□

Ejemplo Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{n-6}=2$$

Demostración. Necesitamos demostrar que
$$\forall\ \epsilon>0,\ \exists\ N\in\mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ N\leq n\ \Rightarrow\ \left|\frac{2n-5}{n-6}-2\right|<\epsilon$$

En este caso se tiene
$$\left|\frac{2n-5}{n-6}\right|=\left|\frac{2n-5-2(n-6)}{n-6}\right|=\left|\frac{17}{n-6}\right|\underbrace{<}_{n>6}\frac{17}{n-6}$$

por lo que

$$\frac{17}{n-6} < \epsilon \;\Rightarrow\; \frac{11}{\epsilon} \underbrace{<}_{n>6} n-6 \;\Rightarrow\; \frac{17}{\epsilon} + 6 < n \;\Rightarrow$$

ahora bien la propiedad arquimediana asegura que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{17}{\epsilon} + 6 + 6 < N$.
Por lo tanto

$$N \leq n \;\Rightarrow\; \frac{17}{\epsilon} + 6 + 6 < n \;\Rightarrow\; \frac{17}{\epsilon} + 6 < n \;\; y \;\; 6 < n \;\Rightarrow\; \frac{17}{\epsilon} < n - 6 \;\; y \;\; 6 < n \;\Rightarrow$$

$$\frac{17}{n-6} < \epsilon \;\Rightarrow\; \left| \frac{2n-5}{n-6} - 2 \right| < \epsilon$$

□

Ejemplo Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4}{7n-1} = \frac{3}{7}$$

Demostración. Necesitamos demostrar que

$$\forall\, \epsilon > 0, \; \exists\, N \in \mathbb{N}, \;\; tal \;\; que \;\; N \leq n \;\Rightarrow\; \left| \frac{3n+4}{7n-1} - \frac{3}{7} \right| < \epsilon$$

En este caso se tiene

$$\left| \frac{3n+4}{7n-1} - \frac{3}{7} \right| = \left| \frac{7(3n+4) - 3(7n-1)}{7(7n-1)} \right| = \left| \frac{31}{7(7n-1)} \right| = \frac{31}{7(7n-1)}$$

por lo que

$$\frac{31}{7(7n-1)} < \frac{31}{(7n-1)} < \epsilon \;\Rightarrow\; \frac{31}{\epsilon} < 7n-1 \;\Rightarrow\; \frac{31}{\epsilon} + 1 < 7n \;\Rightarrow\; \frac{1}{7}\left(\frac{31}{\epsilon} + 1 \right) < n$$

ahora bien la propiedad arquimediana asegura que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{7}\left(\frac{31}{\epsilon} + 1 \right) < N$.
Por lo tanto

$$N \leq n \;\Rightarrow\; \frac{1}{7}\left(\frac{31}{\epsilon} + 1 \right) < n \;\Rightarrow\; \frac{31}{\epsilon} + 1 < 7n \;\Rightarrow\; \frac{31}{\epsilon} < 7n - 1 \;\Rightarrow$$

$$\frac{31}{7n-1} < \epsilon \; \frac{31}{7(7n-1)} < \epsilon \;\Rightarrow\; \left| \frac{3n+4}{7n-1} - \frac{3}{7} \right| < \epsilon$$

□