Sucesiones parte 3

Ejemplo Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{10-n^2} = -1$$

Demostración. Necesitamos demostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\quad tal \quad que \quad N \leq n\ \Rightarrow\ \left|\frac{n^2+3n}{10-n^2} - (-1)\right| < \epsilon$$

En este caso se tiene

$$\left|\frac{n^2+3n}{10-n^2} - (-1)\right| = \left|\frac{n^2+3n}{10-n^2} + 1\right| = \left|\frac{3n+10}{10-n^2}\right| = \frac{3n+10}{|10-n^2|} = \frac{3n+10}{|n^2-10|} \underbrace{=}_{n>3} \frac{3n+10}{n^2-10}$$

Ahora bien

$$\frac{3n+10}{n^2-10} \underbrace{<}_{n>10} \frac{3n+n}{n^2-n} = \frac{4n}{n(n+1)} = \frac{4}{n-1}$$

de manera que

$$\frac{4}{n-1} < \epsilon\ \Rightarrow\ \frac{4}{\epsilon} < n-1\ \Rightarrow\ \frac{4}{\epsilon} + 1 < n$$

Por la propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \dfrac{4}{\epsilon} + 1 + 10$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
N < n\ &\Rightarrow\ \frac{4}{\epsilon} + 1 < n \quad y \quad 10 < n \\
&\Rightarrow\ \frac{4}{\epsilon} < n-1 \quad y \quad 10 < n \\
&\Rightarrow\ \frac{4}{n-1} < \epsilon \quad y \quad 10 < n \\
&\Rightarrow\ \frac{4n}{n^2-n} < \epsilon \quad y \quad 10 < n \\
&\Rightarrow\ \frac{3n+10}{n^2-10} < \epsilon \quad y \quad 10 < n \\
&\Rightarrow\ \left|\frac{n^2+3n}{10-n^2} - (-1)\right| < \epsilon
\end{aligned}$$

□

Ejemplo Demuestre que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2}{n^2+n} = 1$$

Demostración. Necesitamos demostrar que
$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\quad tal\quad que\quad N \leq n\ \Rightarrow\ \left|\frac{n^2-2}{n^2+n} - 1\right| < \epsilon$$

En este caso se tiene
$$\left|\frac{n^2-2}{n^2+n} - 1\right| = \left|\frac{-2-n}{n^2+n}\right| = \frac{n+2}{n^2+n} = \underbrace{<}_{n>2} \frac{n+n}{n^2+n} = \frac{2n}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1}$$

Ahora bien
$$\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$$

de manera que
$$\frac{2}{n} < \epsilon\ \Rightarrow\ \frac{2}{\epsilon} < n$$

Por la propiedad Arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \dfrac{2}{\epsilon} + 2$

Por lo tanto
$$\begin{aligned} N < n\ &\Rightarrow\ \frac{2}{\epsilon} < n \quad y \quad 2 < n \\ &\Rightarrow\ \frac{2}{n} < \epsilon \quad y \quad 2 < n \\ &\Rightarrow\ \frac{2}{n+1} < \epsilon \quad y \quad 2 < n \\ &\Rightarrow\ \frac{2n}{n(n+1)} < \epsilon \quad y \quad 2 < n \\ &\Rightarrow\ \frac{n+2}{n^2+n} < \epsilon \\ &\Rightarrow\ \left|\frac{n^2-2}{n^2+n} - 1\right| < \epsilon \end{aligned}$$

□

Definición 1. *(Sucesión Acotada) Una sucesión numerica $\{a_n\}_{n\in\ \mathbb{N}}$ se denomina acotada si el conjunto de los terminos de la sucesión $x = \{x_n \mid n \in\ \mathbb{N}\}$ en un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Esto significa que existe un número real $k > 0$ tal que $|a_n| < k\ \ \forall\ n \in\ \mathbb{N}$*

Ejemplo Probar que la sucesión de término general
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es acotada

Demostración. Para esto se tiene que

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ...$$

por lo que

$$2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+... < 2+\frac{1}{2!}++\frac{1}{3!}+... < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+.. = 1+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 3$$

por lo tanto la sucesión es acotada por 3 □

Teorema 1. *Si una sucesión numerica es convergente, entonces es acotada.*

Demostración. Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente de numeros reales, entonces dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$ tomando $\varepsilon = 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < 1$

$\therefore \quad ||a_n| - |L|| < |a_n - L| < 1 \quad \Rightarrow \quad |a_n| < 1 + |L| \quad \forall\ n > n_0$

Tomamos $k = \max\{|a_1|,\ |a_2|, ..., |a_N|,\ \ 1+|L|\}$

$\therefore \quad |a_n| < k \qquad \therefore$ La sucesión $\{a_n\}$ es acotada.

□

Ejemplo No toda sucesión acotada es convergente

¿tiene límite la sucesión $a_n = (-1)^n$?

Supongamos que $\exists L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = L$$

esto quiere decir que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \quad tal \quad que \quad |(-1)^n - L| < \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon$$

Caso 1.- Si $L = 0$ para este valor tomamos $\epsilon = \frac{1}{2}$ y se tiene que

$$|(-1)^n - L| = |(-1)^n - 0| = |(-1)^n| = 1 \quad y \quad 1 < \frac{1}{2}$$

es absurdo.

Caso 2.- Si $L > 0$ entonces tomemos $\epsilon = L$ para lo cual $\exists\ N_\epsilon$ tal que $|(-1)^n - L| < \epsilon$ si $n > N_\epsilon$, pero para todo n impar se tiene

$$|(-1)^n - L| = |-1 - L| = 1 + L < L$$

es falso.

Caso 3.- Si $L < 0$ entonces tomemos $\epsilon = -L$ para lo cual $\exists\ N_\epsilon$ tal que $|(-1)^n - L| < \epsilon = -L$ si $n > N_\epsilon$, pero para todo n par se tiene

$$|(-1)^n - L| = |1 - L| = 1 - L < -L \Rightarrow 1 < 0$$

es falso.

Por lo tanto no existe

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

Definición 2. *Se dice que una sucesión de números reales es monótona creciente si cada término es menor o igual que el siguiente. Es decir los términos van aumentando su valor o, a lo sumo, son iguales.*

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Definición 3. *Se dice que una sucesión de números reales es monótona estrictamente creciente si cada término es menor que el siguiente. Es decir los términos van aumentando su valor.*

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo Probar que la sucesión de término general

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es monotona creciente

Solución Usando el desarrorollo del binomio se tiene

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$

Vamos a comparar los términos a_k y a_{k+1}, tenemos entonces que

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\left(1 - \frac{3}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{k}\right) + \ldots$$

$$a_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(1 - \frac{2}{k+1}\right) + \ldots +$$
$$\frac{1}{(k+1)!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(1 - \frac{2}{k+1}\right)\left(1 - \frac{3}{k+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) + \ldots$$

Vamos a comparar los k-ésimos términos

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\left(1 - \frac{3}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{k}\right)$$

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(1 - \frac{2}{k+1}\right)\left(1 - \frac{3}{k+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k}{k+1}\right)$$

tenemos que:

$$n < n+1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} \ \Rightarrow\ -\frac{1}{n} < -\frac{1}{n+1} \ \Rightarrow\ -\frac{h}{n} < -\frac{h}{n+1}, \quad h = 1, 2, 3, \ldots, k-1$$

$$\Rightarrow\ 1 - \frac{h}{n} < 1 - \frac{h}{n+1}, \quad h = 1, 2, 3, \ldots, k-1$$

por lo tanto término a término

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

por lo tanto la sucesión $\{a_n\}$ es monotona estrictamente creciente

Teorema 2. *Si $\{a_n\}$ es una sucesión monotona creciente y acotada superiormente entonces $\{a_n\}$ es convergente*

Demostración. Sea $A = \{a_n \in \{a_n\} | n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que $A \neq \emptyset$ y A esta acotado superiormente por tanto existe $\sup A = \alpha$
por ser $\alpha = \sup A$ se tiene que $\alpha \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ por tanto $\alpha + \epsilon > a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\epsilon > 0$
por otro lado al ser $\alpha = \sup A$ se tien que existe N_ϵ tal que $\alpha - \epsilon < a_{N_\epsilon}$ y como a_n es monotona creciente entonces si $n > N_\epsilon$ entonces $\alpha - \epsilon < a_{N_\epsilon} < a_n$ para todo $n > N_\epsilon$
por tanto $\alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$ para todo $n > N_\epsilon$ esto quiere decir que

$$-\epsilon < a_n - \alpha < \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

□

Dado que la sucesión de término general

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es creciente y acotada entonces converge y se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$