Sucesiones parte 4

Vamos a mostrar que la sucesión
$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
es monotona estrictamente decreciente.
Si b_n es estrictamente decreciente se cumple entonces $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n > b_{n+1}$ esto equivale a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 < \frac{b_n}{b_{n+1}}$$
por lo tanto
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \Rightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)$$
$$= \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right) = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right) = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)$$
$$= \left(\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right) = \left(\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)$$
$$= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)$$
Por desigualdad de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$
Se tiene
$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right) \geq \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right) > \left(1+\frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right)$$
$$= \left(1+\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}\right) = 1$$
Por lo tanto
$$\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \Rightarrow b_n > b_{n+1} \Rightarrow b_n \quad es \quad decreciente$$
Por otro lado tenemos que
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n$$
es decir b_n esta acotada inferiormente por a_n y al ser decreciente se tiene que b_n es convergente.
Vamos a calcular su limite
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) = e(1) = e$$

Ejemplo Usando lo anterior calcularemos el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

para esto tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}=e^{-1}$$

Ejemplo Demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=L_1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{L_1}$$

Demostración. Si $L_1>0$ se tiene que existe $N_\epsilon\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n-L_1|<\frac{\epsilon}{\sqrt{L_1}}$.
por lo que

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L_1}\right|=\left|\frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{L_1})(\sqrt{a_n}+\sqrt{L_1})}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L_1}}\right|=\left|\frac{a_n-L_1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L_1}}\right|\leq\left|\frac{a_n-L_1}{\sqrt{L_1}}\right|=\frac{|a_n-L_1|}{\sqrt{L_1}}$$

$$y\quad\frac{|a_n-L_1|}{\sqrt{L_1}}<\epsilon\Rightarrow|a_n-L_1|<\frac{\sqrt{L_1}\epsilon}{\sqrt{L_1}}=\epsilon$$

□

Ejemplo Demostrar que:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=L_1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n^p=L_1^p$$

Demostración. Vamos a comprobar que $\forall\ \epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $N\leq n\ \Rightarrow\ |a_n^p-L_1^p|<\epsilon$.
Tenemos que

$$\begin{aligned}|a_n^p-L_1^p|&=\left|(a_n-L_1)(a_n^{p-1}+a_n^{p-2}L_1+a_n^{p-3}L_1^2+\cdots+L_1^{p-1})\right|\\&\leq|a_n-L_1|\cdot\left(\left|a_n^{p-1}\right|+\left|a_n^{p-2}L_1\right|+\left|a_n^{p-3}L_1^2\right|+\cdots\left|L_1^{p-1}\right|\right)\end{aligned}$$

como $a_n\to L_1$ se tiene que a_n es acotada, por lo tanto existe $k>0$ tal que $|a_n|<k,\quad\forall\ n\in\mathbb{N}$ por lo tanto

$$\begin{aligned}&|a_n-L_1|\cdot\left(\left|a_n^{p-1}\right|+\left|a_n^{p-2}L_1\right|+\left|a_n^{p-3}L_1^2\right|+\cdots\left|L_1^{p-1}\right|\right)\leq\\&|a_n-L_1|\cdot\left(k^{p-1}+k^{p-2}\left|L_1\right|+k^{p-3}\left|L_1^2\right|+\cdots\left|L_1^{p-1}\right|\right)\end{aligned}$$

Dado que $a_n\to L_1$ entonces para $N\leq n$ hacemos

$$|a_n-L_1|<\frac{\epsilon}{\left(k^{p-1}+k^{p-2}\left|L_1\right|+k^{p-3}\left|L_1^2\right|+\cdots\left|L_1^{p-1}\right|\right)}$$

se tiene que

$$|a_n-L_1|\cdot\left(k^{p-1}+k^{p-2}\left|L_1\right|+k^{p-3}\left|L_1^2\right|+\cdots\left|L_1^{p-1}\right|\right)\ <$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\left(k^{p-1}+k^{p-2}\left|L_1\right|+k^{p-3}\left|L_1^2\right|+\cdots\left|L_1^{p-1}\right|\right)}\right)\left(k^{p-1}+k^{p-2}\left|L_1\right|+k^{p-3}\left|L_1^2\right|+\cdots\left|L_1^{p-1}\right|\right)=\epsilon$$

□

Ejemplo Vamos a mostrar que para cualquier racional $x>0$ se tiene

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Demostración. Sea $x=\frac{p}{q}$ con $p,q\in\mathbb{Z}$. Sabemos que

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

hacemos $n=mq,\quad m=1,2,3,4...$ por lo que

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{mq}\right)^{mq}$$

ahora bien

$$e^x=e^{\frac{p}{q}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{mq}\right)^{mq}\right]^{\frac{p}{q}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{mq}\right)^{\frac{mqp}{q}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{mq}\right)^{mp}$$

Sea $r=mp$ entonces cuando $m\to\infty$ se tiene $r\to\infty$ y $m=\frac{p}{q}$ de esta manera

$$e^x=\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{r}{p}\right)q}\right)^r=\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{p}{rq}\right)^r=\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{x}{r}\right)^r$$

□

Ejemplo Según lo anterior

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^2$$

Ejemplo Vamos a mostrar que para cualquier real x se tiene

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Demostración. Sabemos que para todo $x\in\mathbb{R}$ se tiene $\lfloor x\rfloor\le x\le\lfloor x\rfloor+1$ y tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor}=e$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N \leq n \ \Rightarrow\ \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \epsilon$$

Entonces

$$N \leq x \ \Rightarrow\ N \leq \lfloor x \rfloor \ \Rightarrow\ \left|\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\lfloor x \rfloor} - e\right| < \epsilon$$

□

Ahora vamos a mostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x \rfloor} = e$$

Demostración.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x \rfloor} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x \rfloor + 1}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x \rfloor + 1}\left(\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\lfloor x \rfloor + 2}\right)$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x \rfloor} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x \rfloor + 1}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{\lfloor x \rfloor + 2}\right) = e(1) = e$$

finalmente si $\lfloor x \rfloor + 1 > x$ entonces $\forall\ x > 0$ se tiene

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}\right)^{\lfloor x \rfloor} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\lfloor x \rfloor} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{\lfloor x \rfloor}\right)^{\lfloor x \rfloor + 1}$$

□

Aplicando lo anterior y el teorema de compresión se tiene

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

□