Números Irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Definición 1. *Un campo ordenado F contiene elementos que no son números racionales, tales elementos se llaman números irracionales*

Teorema 1. *No existe* $x \in \mathbb{Q}$ *tal que* $x^2 = 2$

Demostración. Procederemos por contradicción.
Suponemos que existe $x \in \mathbb{Q}$, $x = \dfrac{m}{n}$, $\ n \neq 0, n, m \in \mathbb{Z}$, $(n, m) = 1$ tal que $x^2 = 2$, se tiene entonces que

$$x^2 = 2 \ \Rightarrow \ \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \ \Rightarrow \ \frac{m^2}{n^2} = 2 \ \Rightarrow \ m^2 = 2n^2$$

esta última parte indica que m^2 es multiplo de 2 y según el resultado anterior se tiene que m debe ser multiplo de 2 por lo tanto $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ y tenemos entonces que

$$m^2 = 2n^2 \ \Rightarrow \ (2k)^2 = 2n^2 \ \Rightarrow \ 4k^2 = 2n^2 \ \Rightarrow \ 2k^2 = n^2$$

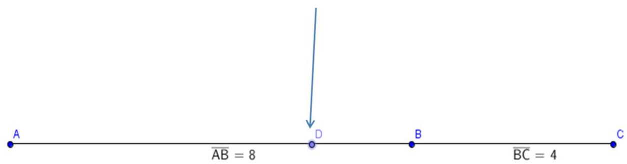
de la misma forma, esta última expresión indica que n^2 es multiplo de 2 por tanto n debe ser multiplo de 2. De esta manera hemos encontrado que tanto m, como m son multiplos de 2 en contradicción con lo supuesto $(n, m) = 1$. Esto quiere decir que no existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$ $\square$

Un ejemplo de número irracional lo tenemos en $\sqrt{32}$ y su existencia en la recta real la podriamos asegurar de la siguiente manera:

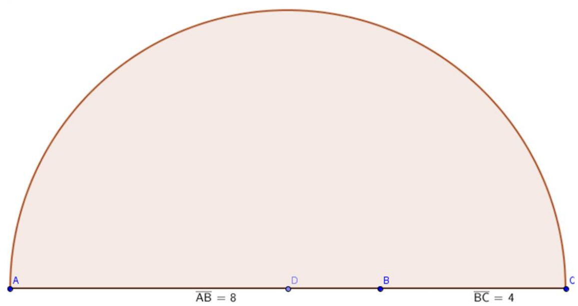
Método Geométrico para encontrar $\sqrt{n}$

Se buscan dos números que multiplicados den como resultado la raíz deseada
Se trazan dos segmentos seguidos uno de otro de la medida de los números encontrados.
Se suman los números encontrados y se dividen entre dos para encontrar el punto medio de los dos segmentos juntos, y posteriormente se pone un punto en dicha distancia.
Se traza una semi-circunferencia haciendo centro en el punto medio encontrado.
Por último, se traza una perpendicular desde el punto donde se unen los dos segmentos hasta tocar la circunferencia, y la distancia que hay desde ese punto a la circunferencia es el resultado de la raíz
Ejemplo: Vamos a encontrar la raíz cuadrada de 32
Se trazan dos segmentos seguidos uno de otro de la medida de los números encontrados.
Se buscan dos números que multiplicados den como resultado la raíz deseada

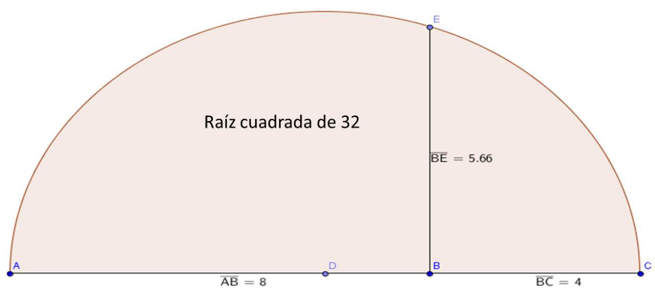
Se suman los números encontrados y se dividen entre dos para encontrar el punto medio de los dos segmentos juntos, y posteriormente se pone un punto en dicha distancia.



Se traza una semi-circunferencia haciendo centro en el punto medio encontrado.



Por último, se traza una perpendicular desde el punto donde se unen los dos segmentos hasta tocar la circunferencia, y la distancia que hay desde ese punto a la circunferencia es el resultado de la raíz

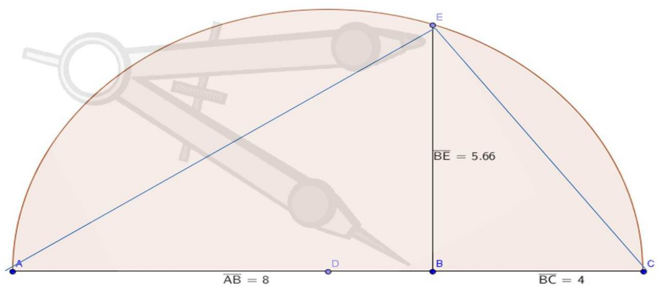


Demostración. Tenemos que los triángulos $\triangle ABE$ y $\triangle BEC$ son semejantes pues $\angle AEB = \angle BEC$ también $\angle EAB = \angle ECB$ por tanto $\angle ABC = \angle EBC$ y de la semejanza obtenemos las siguientes relaciones

$$\frac{EB}{AB} = \frac{CB}{EB} \Rightarrow BE^2 = AB \cdot BC \Rightarrow EB = \sqrt{8 \cdot 4} = \sqrt{32}$$

$\square$

Si con un compas tomamos la abertura de tamaño $\sqrt{32}$ y dicha magnitud con el mismo compas la trasladamos a la recta real, esto aseguraría que $\sqrt{32}$ esta sobre la recta real.



Definición 2. *En general llamamos número irracional a los números decimales ilimitados no periódicos. Dicho de otro modo, un número irracional es un número de infinitas cifras decimales no periódicas.*

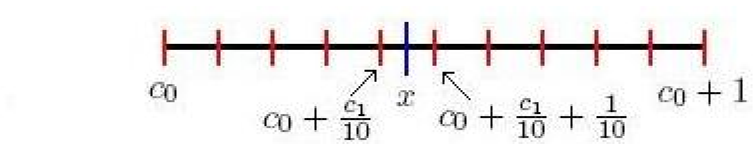
Representación Decimal

Dado un campo ordenado F. Sea $x \in F$ un número cualquiera; supondremos que $x \geq 0$, sin pérdida de generalidad. Es fácil probar que existe un número natural $c_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c_0 \leq x < c_0 + 1$

Existe $c_0 \in \mathbb{Z}$ tal que para $x \in F \quad c_0 \leq x < c_0 + 1$
Dividimos el intervalo $[c_0, c_{0+1}]$ en 10 partes iguales por:

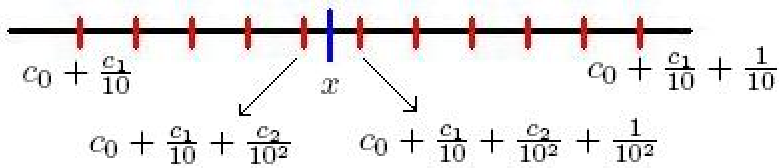
$$c_0, c_0 + \tfrac{1}{10}, c_0 + \tfrac{2}{10}, c_0 + \tfrac{3}{10} + \ \ldots\ + c_0 + \tfrac{9}{10} + c_0 + 1$$

Existe un digito $0 \leq c_1 \leq 9$ tal que: $\quad c_0 + \frac{c_1}{10} \leq 10 < c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{1}{10}$



Continuamos con el proceso:
Repitiendo este proceso, después de n pasos tenemos un intervalo dado por:

$$c_0 + \tfrac{c_1}{10} + \ \ldots\ + \tfrac{c_n}{10^n} \leq x \leq c_0 + \tfrac{c_1}{10} + \ \ldots\ + \tfrac{c_n}{10^n} + \tfrac{1}{10^n}$$



Con lo anterior, la expresión $x = c_0 + 0 \centerdot c_1c_2c_3...$ se denomina representación decimal de x. De manera un tanto informal se acaba de probar que todo número $x \in F$ tiene una representación decimal.

La representación decimal de un número $x \in F$ se dice que es finita, cuando existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $c_m = 0 \;\; \forall\, m > n$, es decir, cuando la representación decimal es de la forma $x = c \centerdot c_1c_2c_3...c_m$

La representación decimal se denomina periódica cuando es de la forma $a \centerdot a_1a_2a_nb\overline{b_1...b_m}$

Todo número racional tiene una representación finita o periódica

Sea $x = \frac{p}{q}$ un número racional escrito en forma de fracción irreducible y supongamos que es positivo. El algoritmo de la división de p por q es el que produce su represe ntación decimal, es sabido que en cada paso, el resto ha de ser un entero entre 0 y $q-1$. Si en algún momento es igual a cero, la representación decimal es finita, si no es así, el algoritmo continua y tras a lo sumo q iteraciones, aparece un mismo resto por segunda vez; a partir de aquí, los números naturales a_n de la representación decimal se van repitiendo indefinidamente y en consecuencia, la representación decimal es periódica.
Recíprocamente.- Sea x un número real con representación decimal periódica (posiblemente finita).

$x = a \centerdot a_1a_2...\overline{b_1b_2...b_m}$ entonces
$10^n x = aa_1a_2...a_n \centerdot \overline{b_1b_2...b_m}$
$10^{n+m} x = aa_1a_2...a_nb_1b_2...b_m \centerdot \overline{b_1b_2...b_m}$
$(10^{n+m} - 10^n)x = aa_1a_2...b_m - aa_1a_2...a_n$
Si llamo p al entero $p = (10^{n+m} - 10^n)x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{p}{(10^{n+m} - 10^n)} = x \in \mathbb{Q}$

Ejercicio.- Probar que $0 \centerdot \overline{9} = 1$

Sol.- Si $r = 0 \centerdot \overline{9} \;\Rightarrow\; 10r = 9 \centerdot \overline{9} \;\Rightarrow\; 10r - r = 9 \;\Rightarrow\; 9r = 9 \;\Rightarrow\; r = 1$

Ejercicio.- Hallar los racionales representados por $0 \centerdot \overline{917}$ y por $2 \centerdot 3\overline{292}$

Sol.- Si $p = 0 \centerdot \overline{917} \;\Rightarrow\; 1000p = 917 \centerdot \overline{917} \;\Rightarrow\; 1000p - p = 917 \;\Rightarrow\; 999p = 917 \;\Rightarrow\; p = \frac{917}{999}$

Si $q = 2 \centerdot 3\overline{292} \;\Rightarrow\; 10q = 23 \centerdot \overline{292} \;\Rightarrow\; 10000q = 23292 \centerdot \overline{292} \;\Rightarrow\; 9990q = 23269 \;\Rightarrow\; q = \frac{23269}{9990}$