Notas de Clase

Sábado 15 de Agosto de 2015

Recordemos que una *proposición* es una oración a la que se le puede asignar un *valor de verdad*, es decir podemos saber si es verdadera o falsa.

Ejemplo. De las siguientes oraciones determinemos cual es proposición.
(i) *Mañana es viernes.* Está oración **no** es proposición, pues está oración es relativa al día en que se esté hablando.
(ii) *3 es un número par.* Esta afirmación **si** es proposición, pues conocemos la noción de que un número sea par, además sabemos que su valor de verdad es **falso**.
(iii) *Pedro conoce a Gabriela.* Esta **no** es proposición, pues no se sabe con exactitud a que personas se hace referencia.
(iv) *2 es un número primo.* Esta **si** es proposición, pues conocemos la noción de número primo y además sabemos que 2 si es un número primo.

Después de haber estudiado un poco las proposiciones nos interesa saber cómo las podemos relacionar proposiciones, para así hacer nuevas proposiciones. Para esta relación utilizamos los conectores lógicos, que a continuación se definen:
(i) $\neg P \equiv$ no P
(ii) $P \wedge Q \equiv P$ y Q
(iii) $P \vee Q \equiv P$ o Q
(iv) $P \Longrightarrow Q \equiv P$ entonces Q
(v) $P \Longleftrightarrow Q \equiv P$ si y solo si Q

De estas definiciones sabemos que:
(i) $\neg P$ es verdadera si P es falsa.
(ii) $P \wedge Q$ es verdadera únicamente si P y Q son verdaderas.
(iii) $P \vee Q$ es verdadera si al menos una de las proposiciones es verdadera.
(iv) $P \Longrightarrow Q$ es falsa únicamente cuando P sea verdadera y Q falsa
(v) $P \Longleftrightarrow Q$ es verdadera únicamente si $P \Longrightarrow Q$ es verdadera al igual que $Q \Longrightarrow P$

Con base en la información anterior si consideramos la proposición

$$(P \vee Q) \Longrightarrow R$$

De la cual sabemos que $Q \Longrightarrow R$ tiene el valor de verdad falso, vemos que esta condición es suficiente para saber el valor de verdad de $(P \vee Q) \Longrightarrow R$.
Pues por un lado tenemos que si: $Q \Longrightarrow R$ es falsa, entonces Q es verdadera mientras que R es falsa.

Por lo que si P es falsa, entonces $(P \vee Q)$ es verdadera, por lo que $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ es falsa, ya que R es falsa. Además por otro lado si P es verdadera, entonces $(P \vee Q)$ es verdadera, por lo que $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ es falsa, pues R es falsa.

De la proposición

$$(P \vee Q) \Longrightarrow R$$

Vemos que si únicamente sabemos que $(R \vee Q)$ es falsa. Esta no es información suficiente para saber el valor de verdad de $(P \vee Q) \Longrightarrow R$.

Pues si $(R \vee Q)$ es falsa, entonces Q y R son falsas. De este hecho se sigue que $P \vee Q$ es falsa o verdadera, pues queda libre el valor de verdad de P. Entonces si $(P \vee Q)$ es verdadera la proposición $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ es falsa, pues R es falsa; por otro lado si $(P \vee Q)$ es falso, entonces $(P \vee Q) \Longrightarrow R$ es verdadera pues R es falsa.

Después de estudiar cuando podemos decir que la información es suficiente para saber el valor de verdad de una proposición. Se dejó probar que las siguientes equivalencias se cumplen

(i) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
(ii) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
(iii) $P \Longleftrightarrow Q \equiv (P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$

Como ayuda a la tarea que se les dejo para el viernes 21 de agosto, se dio una ayuda para resolver el siguiente ejercicio.

Ejercicio. Pruebe que si para un $\triangle XYZ$ rectángulo con catetos x y y y hipotenusa z, tal que $x = y$ (es decir isoceles), entonces el área A está dada por

$$A = \frac{z^2}{4}$$

Hint. Por un lado use la relación del teorema de Pitágoras que dice:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

y use el hecho que $x = y$. Por otro lado argumente porque el área

$$A = \frac{xy}{2}$$

y a este hecho aplique la hipótesis de que $x = y$.