Clase del Sábado

22 - Agosto - 2015

Denotemos por $\mathbb{Q}$ al siguiente cjto.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0 \right\}$$

Daremos por hecho lo siguiente

(i) Si $x, y \in \mathbb{Q}$, ent $x+y \in \mathbb{Q}$

(ii) si $x, y \in \mathbb{Q}$, ent $x \cdot y \in \mathbb{Q}$

(iii) $1 \in \mathbb{Q}$ y $0 \in \mathbb{Q}$

(iv) $\mathbb{Q}$ es campo.

(v) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(vi) $\forall p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $\sqrt{2}\, p \notin \mathbb{Q}$

Cabe mencionar que (vi) es una deuda que se demostrara después.

Definamos

$$F = \{ a + \sqrt{2}\, b : a, b \in \mathbb{Q} \}$$

Sean $a+\sqrt{2}\, b, a'+\sqrt{2}\, b' \in F$, se definen las siguientes operaciones en F

(i) $(a+\sqrt{2}\, b) +_F (a'+\sqrt{2}\, b') = (a'+a) + \sqrt{2}(b+b')$

(ii) $(a+\sqrt{2}\, b) \cdot_F (a'+\sqrt{2}\, b') = (aa'+2bb') + \sqrt{2}(ab'+a'b)$

Denotemos por

$0_F = (0 + \sqrt{2}(0))$

$1_F = (1 + \sqrt{2}(0))$

Afirmación: $(F, +_F, \cdot_F, 0_F, 1_F)$ es campo.

Dem.

(i) Probemos que $+_F$ está bien definida.

Sean $(a+\sqrt{2}\, b), (a'+\sqrt{2}\, b') \in F$

Como

$(a+\sqrt{2}\, b) +_F (a'+\sqrt{2}\, b') = (a+a') + \sqrt{2}(b+b')$

Ent. sabemos que $a+a' \in \mathbb{Q}$ y $b+b' \in \mathbb{Q}$, ie, exist. $z, w \in \mathbb{Q}$ t.q

$z = a+a'$, $w = b+b' \in \mathbb{Q}$

$\therefore (a+\sqrt{2}\, b) +_F (a'+\sqrt{2}\, b') = z + \sqrt{2}\, w \in F$

$\therefore +_F$ está bien definida.

(ii) Probemos que $\cdot_F$ está bien definida.

Como $aa'+2bb' \in \mathbb{Q}$ y $ab'+a'b \in \mathbb{Q}$ ent existen $z, w \in \mathbb{Q}$, t.q,

$z = aa'+2bb'$

$w = ab'+a'b$

Por lo que

$(a+\sqrt{2}\, b) \cdot_F (a'+\sqrt{2}\, b') = (aa'+2bb') + \sqrt{2}(ab'+a'b)$

$= z + \sqrt{2}\, w \in F$

$\therefore \cdot_F$ está bien definida.

¿Se deja probar lo siguiente?

TAREA MORAL

(iii) $+_F$ y $\cdot_F$ son conmutativos

(iv) $\forall (a+\sqrt{2}\, b) \in F$, entonces

$(a+\sqrt{2}\, b) +_F 0_F = (a+\sqrt{2}\, b)$

(v) $\forall (a+\sqrt{2}\, b) \in F$

$(a+\sqrt{2}\, b) \cdot 1_F = a+\sqrt{2}\, b$

Observemos que si $(a+\sqrt{2}\,b) \in F$.

ent $(-a+\sqrt{2}(-b)) \in F$, pues como $a, b \in \mathbb{Q}$, ent existen $-a, -b \in \mathbb{Q}$, t.q $a-a=0=b-b$.

Además

$$(a+\sqrt{2}\,b) +_F (-a+\sqrt{2}(-b)) = (a-a)+\sqrt{2}(b-b) = 0+\sqrt{2}(0) = 0_F$$

$\therefore \forall\, (a+\sqrt{2}\,b)\ \exists\ (-a+\sqrt{2}(-b))$, t.q,

$$(a+\sqrt{2}) + (-a+\sqrt{2}(-b)) = 0$$

Es decir existe inverso aditivo ∎

Sea $(a+\sqrt{2}\,b) \in F$, con $(a+\sqrt{2}\,b) \neq 0_F$, Entonces $a \neq 0$ ó $b \neq 0$. La pregunta que surge es la sig.

¿existe $(a'+\sqrt{2}\,b') \in F$, t.q $(a+\sqrt{2}\,b) \cdot_F (a'+\sqrt{2}\,b') = 1_F$?

La respuesta es sí.

Nuestra tarea construir $(a'+\sqrt{2}\,b')$ con dicha propiedad.

Construcción: Como $(a'+\sqrt{2}\,b')$ cumple

$$(a+\sqrt{2}\,b) \cdot_F (a'+\sqrt{2}\,b') = (aa'+2bb') + \sqrt{2}(ab'+a'b) = (1)+\sqrt{2}(0) = 1_F$$

Entonces tenemos el sig. sist. de ec. de 2×2.

$$aa'+2bb' = 1$$
$$ba' + ab' = 0.$$

Vemos que tiene solución, pues por cramer si

$$\det\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2-2b^2 \neq 0$$

Tiene solución

Dem Como $a \neq 0$ ó $b \neq 0$ ent. la esperanza es al menos que a^2-2b^2 sea distindo de 0. Para esto probemoslo. S.p.g supongamos que $b^2 \neq 0$. Entonces si tenemos

$$a^2-2b^2=0,$$
$$a^2 = 2b^2, \text{ ent}$$
$$\sqrt{a^2} = \sqrt{2b^2} = \sqrt{2}\,|b|$$
$$|a| = \sqrt{2}\,|b| \notin \mathbb{Q}\ ! \text{ pues } b \neq 0$$

$\therefore a^2-2b^2 \neq 0$.

Entonces por Cramer el sistema tiene una única solución y

$$a' = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & a \end{pmatrix}}{a^2-2b^2} = \frac{a-2b(0)}{a^2-2b^2} = \frac{a}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$$

$$b' = \frac{\det\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}}{a^2-2b^2} = \frac{a(0)-b(1)}{a^2-2b^2} = \frac{-b}{a^2-2b^2} \in \mathbb{Q}$$

Entonces proponemos que

$$(a+\sqrt{2}\,b) \cdot_F (a'+\sqrt{2}\,b') =$$
$$(a+\sqrt{2}\,b) \cdot_F \left(\frac{a}{a^2-2b^2} + \sqrt{2}\left(\frac{-b}{a^2-2b^2}\right)\right) = 1_F$$

Esto demuestrelo por favor.

Para terminar pruebe que $\cdot_F$ se distribuye sobre $+_F$

:)

Valor absoluto

Sea F un campo ordenado.

Definamos $\forall x \in F$, el valor absoluto de x, $|x|$. Como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Obs.// $\forall x \in F$ $(|x| \geq x)$
$\forall x \in F$ $x^2 \geq 0$

Prop.- $\forall x \in F$ $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

Dem.- Sea $x \in F$, si $x \leq 0$, ent. $x^2 \geq 0$ al igual que para $x > 0$ $x^2 > 0$.

Ent $|x^2| = x^2$

Por otro lado como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $|x|^2 = x^2$ si $x \geq 0$ y
$|x|^2 = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$ si $x < 0$

$\therefore$ $|x^2| = x^2 = |x|^2$. $\forall x \in F$. ... $(*)$

Teorema: Para cualesquiera $y, x, a \in F$, se cumple

(i) $|x| < a$ sii $-a < x < a$

(ii) $a < |x|$ sii $a < x$ ó $x < -a$

(iii) $|x - y| < a$ sii $y - a < x < y + a$

Dem.- Sean $x, y, a \in F$

(i) $\Rightarrow$] Sup $|x| < a$. Como $0 \leq |x|$, ent $0 \leq |x| < a$, por lo tanto $0 < a$. ... $(\blacktriangle)$

Por otro lado considemos los siguientes casos

Caso 1. $0 \leq x$, ent $|x| = x$, por lo que $0 \leq x = |x| < a$. Además por otro lado $-a \leq 0$ (Pues $a > 0$ por $\blacktriangle$). Ent

$-a < 0 \leq x < a$

$\therefore$ $-a < x < a$.

Caso 2.- con $x < 0$, como $x \leq |x| < a$, ent $x < a$.

Por otro lado como $|x| < a$ y $x < 0$, entonces $-x < a$, por lo tanto

$-a < -(-x) = x$.

Entonces

$-a < x < a$.

Por caso (1) y (2)

$-a < x < a$.

$\Leftarrow$] Sup $-a < x < a$. P.D $|x| < a$.

Dem.- C1. Si $x \geq 0$. Entonces $|x| = x < a$. Ent $|x| < a$.

C2.- Si $x < 0$, ent. $|x| = -x$. Por otro lado como $-a < x$ (Por hip), ent.

$-x < -(-a) = a$

Ent $|x| = -x < a$ $\therefore$ $|x| < a$

Por caso (1) y (2). Ent

$|x|<a$

(ii) P.D $a<|x|$ sii $a<x$ ó $x<-a$.

Dem

$\Rightarrow$) Sup. $a<|x|$ P.D $a<x$ ó $x<-a$

C1 si $x\geq 0$. Ent $|x|=x$. Por lo que

$a<|x|=x$. Ent $a<x$.

C2 si $x<0$, ent $|x|=-x$

Como $a<|x|=-x$, ent.

$-(-x)<-a$, ∴ $x<-a$

Por caso (1) y (2)

$a<x$ ó $x<-a$

$\Leftarrow$) Sup $a<x$ ó $x<-a$. P.D $a<|x|$

Dem. C1 sup. $a<x$, como $x\leq|x|$ ent $a<x\leq|x|$

∴ $a<|x|$

C2 si $x<-a$. como

$-|x|\leq x$ (Demostrado en clase)

Ent $-|x|\leq x<-a$, ent.

$-|x|<-a$, ∴ $-(-a)<-(-|x|)$

i.e, $a<|x|$

Por caso 1 y 2

$a<|x|$

(iii) P.D $|x-y|<a$ sii $y-a<x<y+a$.

Dem.- Por (i) $|x-y|<a$ sii

$-a<x-y<a$ sii

$-a+y<x-y+y<a+y$ sii

$-a+y<x<a+y$ ■

Nota.- No olvide estas desigualdades.

Teorema.- Para cualesquiera $x,y,\in F$ se cumple

(i) $|x+y|\leq|x|+|y|$

(ii) $||x|-|y||\leq|x-y|$

(iii) $||x|-|y||\leq|x+y|$

Dem Sean $x,y\in F$

(i) Como $|x+y|^2=(x+y)^2$

Ent $|x+y|^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, como

$2xy\leq 2|xy|=2|x||y|$, ent.

$|x+y|^2=x^2+2xy+y^2\leq x^2+2|x||y|+y^2$

Por (*) $=|x|^2+2|x||y|+|y|^2$

$=(|x|+|y|)^2$

Ent $|x+y|^2\leq(|x|+|y|)^2$

(Por Tarea Moral.- Si $0<a,b$, $a^2<b^2$, ent $a<b$)

∴ $|x+y|\leq|x|+|y|$

(ii) Como

$|x|=|x+(-y+y)|=|(x-y)+y|$

Por (i) $\leq|x-y|+|y|$ ...(1)

Ent

$|x|-|y| \leq |x-y| \ldots (1)$

Por otro lado

$|y| = |y+(-x+x)| = |(y-x)+x|$

Por (i) $\leq |y-x| + |x|$

Mostrado en clase $\leq |x-y| + |x|$

Ent

$|y|-|x| \leq |x-y| \ldots (2)$

Por (1) y (2)

$||x|-|y|| \leq |x-y|$

(iii) Procediendo de manera análoga a (ii).

Como

$|x| = |x+(y-y)| \leq |x+y| + |-y|$

$= |x+y| + |y|$

Ent

$|x|-|y| \leq |x+y| \ldots (■)$

Por otro lado

$|y| = |y+(x-x)| = |(y+x)-x|$

$\leq |y+x| + |-x|$

$= |y+x| + |x|$

Ent

$|y|-|x| \leq |y+x| \ldots (▲)$

Por (■) y (▲)

$||x|-|y|| \leq |x+y|$ ■

Tareas Morales

Revisar los ejercicios del "Calculos" de Michael Spivak del Cápitulo I.

En especial

2, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 13.

No se les olvide que Pueden preguntar cualquier duda en relación al curso en el Taller de Matemáticas de Lunes – Viernes de 13:00 a 15:00 conmigo ó de 10:00 a 18:00 con cualquier otro asesor.