Notas de Clase

Sábado 29 de agosto de 2015

Sea F un campo, y sea $a \in F$, $a \neq 0$. Definamos

$$\begin{array}{c} a^0 = 1 \\ a^{-1} = \frac{1}{a} \\ a^{-(n+1)} = a^{-n}a^{-1} \end{array}$$

Ejercicio 1. Demuestre que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$

$$a^{-m-n} = a^{-m}a^{-n}$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$, y demostremos que

$$a^{-m-n} = a^{-m}a^{-n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esta demostración se hará por inducción sobre n.
Paso Base. Demostremos que es válido para $n = 1$.

$$\begin{array}{rcll} a^{-m-1} & = & a^{-(m+1)} & \\ & = & a^{-m}a^{-1} & \text{Por definición} \end{array}$$

Por lo tanto $a^{-m-1} = a^{-m}a^{-1}$, es decir, válido para $n = 1$.
Hipótesis de Inducción. Supongamos que es válido para $1 \leq k$, es decir, suponemos válido

$$a^{-m-k} = a^{-m}a^{-k}$$

Paso Inductivo. Por demostrar que es válido para $n = k + 1$, es decir

$$\textbf{P.D.} \quad a^{-m-(k+1)} = a^{-m}a^{-(k+1)}$$

Como

$$\begin{array}{rccc} a^{-m-(k+1)} & = & a^{-m-k-1} & \\ & = & a^{(-m-k)-1} & \text{Por asociatividad de la suma en } \mathbb{N} \\ & = & a^{-m-k}a^{-1} & \text{Definición} \\ & = & \left(a^{-m}a^{-k}\right)a^{-1} & \text{Por hipótesis de inducción} \end{array}$$

Por otro lado $\left(a^{-m}a^{-k}\right)a^{-1} = a^{-m}\left(a^{-k}a^{-1}\right) = a^{-m}a^{-(k+1)}$. Por lo tanto

$$a^{-m-(k+1)} = a^{-m}a^{-(k+1)}$$

Por lo tanto válido para toda $n \in \mathbb{N}$. ■

Ejercicio 2. (Tarea Moral). Sea $a \in F$, $a \neq 0$. Demuestre

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 3. (Tarea Moral). Sean $x, y \in F$, con F un campo ordenado, tales que, $0 < x < y$. Demuestre por favor

$$0 < x^n < y^n$$

Ejercicio 4. (Tarea Moral). Demuestre que para cualesquiera $a_1, \ldots, a_n \in F$

$$|a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \cdots + |a_n|$$

Ejercicio 5. (Tarea Moral). Demuestre para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n\,(n+1) = \tfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Se realizo el ejercicio 4.

Ejercicio 4.
Demostración Notemos que esta inducción su paso base inicia en $n = 2$.
Paso Base. Mostremos que es válida para $n = 2$. Sean $a_1, a_2 \in F$, entonces

$$|a_1 + a_2| \quad \leq \quad |a_1| + |a_2| \quad \text{Desigualdad del triángulo}$$

Por lo tanto válido para $n = 2$.
Hipótesis de Inducción. Supongamos que para cualesquiera $a_1, \ldots, a_k \in F$ con $2 \leq k$, se tiene

$$|a_1 + \cdots + a_k| \leq |a_1| + \cdots + |a_k|$$

Paso Inductivo. Demostremos que es válido para $k+1$, es decir, por demostrar: que si $a_1, \ldots, a_{k+1} \in F$, entonces

$$|a_1 + \cdots + a_{k+1}| \leq |a_1| + \cdots + |a_{k+1}|$$

Vemos que

$$\begin{array}{rcll} |a_1 + \cdots + a_{k+1}| & = & |(a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1}| & \\ & \leq & |(a_1 + \cdots + a_k)| + |a_{k+1}| & \text{Desigualdad del triángulo} \\ & \leq & |a_1| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}| & \text{Hipótesis de Inducción} \end{array}$$

Por lo tanto

$$|a_1 + \cdots + a_{k+1}| \leq |a_1| + \cdots + |a_k| + |a_{k+1}|$$

Por lo tanto válido para $k+1$. $\blacksquare$

Ejercicio 6. Probemos que para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que, $-1 < \alpha$ y $\alpha \neq 0$, se tiene

$$1 + n\alpha < (1+\alpha)^n \quad \forall n \geq 2$$

Demostración. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que, $-1 < \alpha$ y $\alpha \neq 0$, y demostremos por inducción la desigualdad anterior.

Paso Base. Veamos que es válido para $n = 2$.

$$\begin{array}{rcll} (1+\alpha)^2 & = & 1 + 2\alpha + \alpha^2 & \\ & > & 1 + 2\alpha & \text{Pues } \alpha^2 > 0 \end{array}$$

Por lo tanto $1 + 2\alpha < (1+\alpha)^2$.

Hipótesis de Inducción. Supongamos que para $2 \leq k$ se tiene

$$1 + k\alpha < (1+\alpha)^k$$

Paso Inductivo. Por demostrar

$$1 + (k+1)\alpha < (1+\alpha)^{k+1}$$

Como $0 < \alpha + 1$, entonces $(1+k\alpha)(\alpha+1) < (1+\alpha)^k (\alpha+1) = (1+\alpha)^{k+1}$. Por otro lado

$$\begin{array}{rcll} (1+k\alpha)(\alpha+1) & = & \alpha + 1 + k\alpha^2 + k\alpha & \\ & = & 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2 & \\ & > & 1 + (k+1)\alpha & \text{Pues } k\alpha^2 > 0 \end{array}$$

Por lo tanto

$$1 + (k+1)\alpha < (1+\alpha)^{k+1}$$

Por lo tanto válido para $k + 1$. ∎

Recordemos que $\sqrt[2]{2} \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto, si tomamos el conjunto universal como $\mathbb{R}$, entonces $\mathbb{Q}^c \neq \varnothing$.

Bajo esta observación nos preguntamos si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

Afirmación 1. Si $a \in \mathbb{Q}^c$, $b \in \mathbb{Q}$ con $b \neq 0$. Entonces $ab \in \mathbb{Q}^c$.
Vemos que esta afirmación es **Verdadera.**
Demostración (Contradicción). Supongamos que $ab \in \mathbb{Q}$.
Como $b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$, existe $b^{-1} \in \mathbb{Q}$. Entonces

$$ab\left(b^{-1}\right) \in \mathbb{Q}$$

Como $ab\left(b^{-1}\right) = a\left(bb^{-1}\right) = a\,(1) = a$. Entonces $a \in \mathbb{Q}$!.
Por lo tanto $ab \in \mathbb{Q}^c$. $\blacksquare$

Afirmación 2. Si $a, b \in \mathbb{Q}^c$. Entonces $a + b \in \mathbb{Q}^c$.
Vemos que esta afirmación es **Falsa.**
Contraejemplo. Como $\sqrt[2]{2} \in \mathbb{Q}^c$, entonces $-\sqrt[2]{2} \in \mathbb{Q}^c$ (se sigue de la afirmación anterior). Entonces si tomamos

$$a = \sqrt[2]{2} \ \text{ y } \ b = -\sqrt[2]{2}$$

Vemos que $a + b = \sqrt[2]{2} + \left(-\sqrt[2]{2}\right) = 0 \in \mathbb{Q}$. $\blacksquare$

Afirmación 3. Si $a, b \in \mathbb{Q}^c$. Entonces $a \cdot b \in \mathbb{Q}^c$.
Vemos que esta afirmación es **Falsa.**
Contraejemplo. Si tomamos

$$a = \sqrt[2]{2} \ \text{ y } \ b = \sqrt[2]{2}$$

Entonces $a \cdot b = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{2} = 2 \in \mathbb{Q}$. $\blacksquare$

De las afirmaciones anteriores vemos que $\mathbb{Q}^c$ no es cerrado bajo sumas y productos, por lo que podemos concluir que $\mathbb{Q}^c$ no es campo.