Notas de Clase
Sábado 12 de Septiembre de 2015.

En la primera de la clase se resolvieron los siguientes ejercicios.

Una inducción más. Demuestre que para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Demostración.
Pase Base. P.D *que la afirmación es verdadera para* $n=1$.
Como
$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$
y por otro lado
$$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
entonces
$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$$
Por lo tanto válida para $n=1$.
Hipótesis de Inducción. *Supóngase válida para* $n=k\geq 1$, es decir,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\,(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Paso Inductivo. P.D *que la afirmación es verdadera para* $n=k+1$.
Por H.I, tenemos

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\,(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

por lo que al sumando $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ a la igualdad anterior tenemos

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\,(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\,(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\,(k+2)}$$

entonces

$$\begin{array}{rcll}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} & = & \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} & \\
 & = & \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} & \text{Desarrollo de la suma} \\
 & = & \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+2)} & \text{Factorizando y reduciendo términos}
\end{array}$$

Entonces
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k+1\,(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Por lo tanto válido para $n = k + 1$. ■

Ejercicio 1. Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < b$. Demuestre, por favor, que para cualquier punto $x \in [0, b]$, existe $t \in [0, 1]$, tal que

$$x = tb$$

Demostración. Sea $x \in [0, b]$, entonces

$$0 \leq x \leq b$$

como $0 < b$, existe $b^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $bb^{-1} = 1$, además $b^{-1} > 0$. Por lo que multiplicando la desigualdad anterior por b^{-1} se obtiene

$$0 = 0b^{-1} \leq xb^{-1} \leq bb^{-1} = 1$$

Entonces $xb^{-1} \in [0, 1]$, además por otro lado

$$x = x \cdot 1 = x\left(b^{-1}b\right) = \left(xb^{-1}\right)b$$

Por lo tanto tomando a $xb^{-1} = t$ se obtiene el resultado deseado. ■

Ejercicio 2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Demuestre, por favor, que para cualquier punto $x \in [a, b]$, existe $t \in [0, 1]$, tal que

$$x = a + t(b - a)$$

Demostración. Sea $x \in [a, b]$, como

$$a \leq x \leq b$$

entonces sumando $(-a)$ a la desigualdad anterior obtenemos

$$a + (-a) \leq x + (-a) \leq b + (-a)$$

por lo que $x - a \in [0, b - a]$. Además como $a < b$, entonces $b - a > 0$. Por el ejercicio anterior existe $t \in [0, 1]$ tal que

$$x - a = t(b - a)$$

Por lo tanto

$$x = a + t(b - a)$$

Ejercicio 3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Demuestre, por favor, que si

$$x = a + t(b - a)$$

con $t \in [0, 1]$, entonces $x \in [a, b]$.

Demostración. Sea $t \in [0,1]$, entonces

$$0 \leq t \leq 1$$

entonces al multiplicar por $(b-a)$ la desigualdad anterior se obtiene

$$0 = 0\,(b-a) \leq t\,(b-a) \leq 1\,(b-a) = b-a$$

puesto que $b-a>0$, entonces sumando a a la desigualdad anterior

$$0 + a \leq a + t\,(b-a) \leq a + t\,(b-a)$$

por lo tanto $a + t\,(b-a) \in [a,b]$ $\forall t \in [0,1]$. ■

Notemos que los ejercicios anteriores nos ayudan a pensar cómo podemos resolver lo siguiente.

Tarea Moral 1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Demuestre, por favor, que para cualquier punto $x \in (a,b)$, existe $t \in (0,1)$, tal que

$$x = a + t\,(b-a)$$

Tarea Moral 2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$. Demuestre, por favor, que si

$$x = a + t\,(b-a)$$

con $t \in (0,1)$, entonces $x \in (a,b)$.

Después de resolver los ejercicios anteriores se hizo un breve repaso a las propiedades trigonométricas.

Ejercicio. Demuestre las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
sen\,(y)\cos(x) &= \frac{1}{2}\left[sen\,(x+y) + sen\,(x-y)\right] \\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right] \\
sen\,(x)\,sen\,(y) &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]
\end{aligned}$$

Demostración. De la primera, las dos últimas se dejarón como tarea Moral.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left[sen\,(x+y) + sen\,(x-y)\right] &= \tfrac{1}{2}\left[sen\,(x)\cos(y) + sen\,(y)\cos(x) - \left(sen\,(x)\cos(y) - sen\,(y)\cos(x)\right)\right] \\
&\qquad \text{Propiedades de la suma de ángulos} \\
&= \tfrac{1}{2}\left[2sen\,(y)\cos(x)\right] \\
&= sen\,(y)\cos(x)
\end{aligned}$$

Para la segunda parte discutimos un poco del concepto de función, además vimos que este concepto es muy importante, ya que una aplicación este concepto es el decir cuando dos conjuntos tienen el mismo número de elementos. Para ello introducimos la siguiente definición provisional.

Definición Diremos que dos conjuntos tienen el mismo *cardinal* (número de elementos), si existe una función biyectiva entre ellos.

Ejemplo. Considere el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y el conjunto $I_3 = \{0, 1, 2\}$. Notemos que estos conjuntos tienen el mismo cardinal, pues la función

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & I_3 \\ & a & \longrightarrow & f(a) = 0 \\ & b & \longrightarrow & f(b) = 1 \\ & c & \longrightarrow & f(c) = 2 \end{array}$$

es biyectiva.

Después nos preguntamos: ¿Los números enteros ($\mathbb{Z}$) tendrán el mismo cardinal que los naturales ($\mathbb{N}$)?, y la respuesta fue si, pues en clase construimos la función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longrightarrow & \begin{array}{ll} f(n) = 2n & \text{si } n \geq 0 \\ f(n) = 2|n| + 1 & \text{si } n < 0 \end{array} \end{array}$$

la idea es mandar a los negativos a los naturales impares y a los positivos a los naturales pares. Se dejó como ejercicio mostrar que en efecto esta función es biyectiva.

Más ejemplos

(i) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tales que, $a < b$ y $c < d$. Notemos que para cualquier $x \in (a, b)$, el punto

$$c + \frac{d - c}{b - a}(x - a)$$

esta en el intervalo (c, d), este hecho se debe a nuestra tarea moral 1. Por lo que podemos pensar que la asignación

$$\begin{array}{rccc} f: & (a, b) & \longrightarrow & (c, d) \\ & x & \longrightarrow & f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x - a) \end{array}$$

es una función. Nuestro ejercicio es demostrar que es biyectiva.

(ii) Considere la función.

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, 1] & \longrightarrow & (0, 1) \\ & x & \longrightarrow & \begin{array}{c} f(0) = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2}, \text{ si } n \in \mathbb{N} \\ f(x) = x, \text{ si } x \neq \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \end{array}$$

demuestre que es biyectiva.

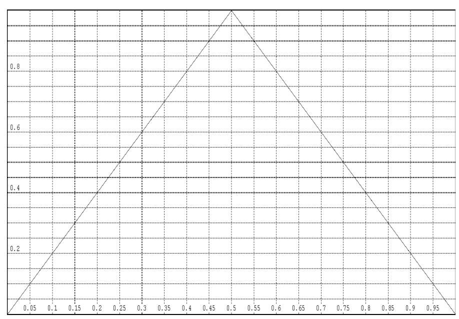
Nótese que una conclusión importante del inciso (ii) es que si usted tiene un conjunto infinito y le quita dos puntos, este sigue siendo infinito. Para finalizar esta sección argumente porque cualquier intervalo abierto de la forma (a,b), con $a,b\in\mathbb{R}$, tiene el mismo número de elementos que $\mathbb{R}$.

Para terminar una visita muy rápida a la función tienda.

Considérese la función

$$\begin{array}{rccc} T: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longrightarrow & \begin{array}{c} T(x)=2x, \text{ si } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ T(x)=2-2x, \text{ si } x\in\left[\frac{1}{2},1\right] \end{array} \end{array}$$

Consideremos su gráfica



Exploremos alguna de sus propiedades.

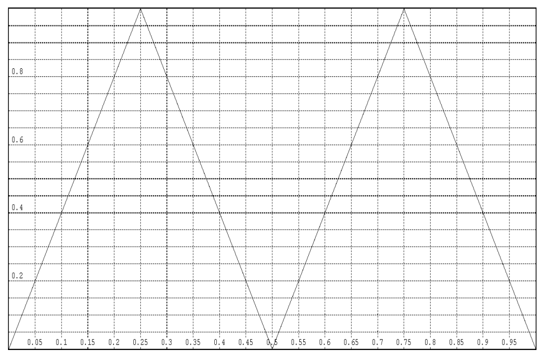
(i) Cumple con la propiedad del *punto fijo*, es decir, existe un punto $x\in[0,1]$, tal que, $T(x)=x$. Pues vemos que

$$\begin{aligned} T(0) &= 2\cdot 0=0 \\ T\left(\frac{2}{3}\right) &= 2-2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(ii) Si denotamos con T^2 a $T\circ T$, vemos que está bien definida pues dicha función tiene el mismo dominio y codominio, además su regla de correspondencia es

$$\begin{array}{rccc} T: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longrightarrow & \begin{array}{c} T(x)=4x, \text{ si } x\in\left[0,\frac{1}{4}\right] \\ T(x)=2-4x, \text{ si } x\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] \\ T(x)=4x-2, \text{ si } x\in\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right] \\ T(x)=4-4x, \text{ si } x\in\left[\frac{3}{4},1\right] \end{array} \end{array}$$

y su gráfica es



Retos.

(i) De la regla de correspondencia para $T^3 = T \circ T^2$

(ii) Encuentre un punto $x \in [0,1]$, tal que, $T(x) \neq x$ y $T^2(x) \neq x$, pero $T^3(x) = x$.