Clase del Sábado
26 de Septiembre de 2015

Recordemos que una *sucesión* $\{a_n\}$ *de números reales*, es una colección de números, tales que

$$a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dicho de otra manera, $\{a_n\}$ es la imagen de una función

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde $a(n) = a_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

1 Ejemplos. Consideremos las siguientes sucesiones.
(i) $\left\{\frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$
(ii) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
(iii) $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$ La sucesión de áreas del triángulo de Sierpensky
(iv) Definamos por recursión la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 \\ F_1 &= 1 \\ F_2 &= F_0 + F_1 = 2 \\ &\vdots \\ F_{n+2} &= F_n + F_{n-1} \end{aligned}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$. A esta sucesión se le suele llamar sucesión de Fibonacci.

Nuestra siguiente idea fue considerar la idea

2 Convención. Dado un punto $u \in \mathbb{R}$, diremos que $U \subseteq \mathbb{R}$, es una *vecindad* de u, si $u \in U$ y U es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

3. Afirmación. Para todo punto $u \in \mathbb{R}$ existe una vecindad de U.
Dem. Sea $u \in \mathbb{R}$, tomando a $U = (u-1, u+1)$, se sigue que es vecindad de u. ■

Recordemos que el tema central de esta semana fue el considerar que significa que una sucesión $\{a_n\}$ *converja (tienda a)* $L \in \mathbb{R}$, que solemos denotar como

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L$$

Esta definición la podemos entender como: Diremos que $\{a_n\}$ *converge* a L, si para cualquier vecindad U_L de L, existe un momento ($N_0 \in \mathbb{N}$), tal que, si $n \geq N_0$, entonces

$$a_n \in U_L$$

Es decir, $\{a_n\}$ *converge* a L, si cada vez que U_L vecindad de L sea más chica, podemos encontrar una infinidad de elementos de $\{a_n\}$ estén en U_L, la podemos escribir como de la siguiente manera.

4. Definición. Diremos que $\{a_n\}$ *converge* a L, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_0$, entonces

$$a_n \in (u - \varepsilon, u + \varepsilon)$$

es decir $|a_n - L| < \varepsilon$, si $n \geq N_0$.

5. Ejemplo

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$. P.D que existe una $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_0$, entonces

$$\left| \frac{2}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad (\bigstar)$$

Para ello notemos que $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, y por el principio arquimediano existe una $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{\varepsilon}{2} < N$$

Además, si $n \geq N$

$$\frac{\varepsilon}{2} < N \leq n$$

Entonces por propiedades de los inversos multiplicativos se sigue

$$\left| \frac{2}{n} \right| \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$$

Por lo tanto tomando $N_0 = N$ se sigue $(\bigstar)$. ■

De la definición es claro que las sucesiones (ii) y (iv) no tienen límite, es decir no convergen.

Por otro lado, vemos que demostrar con toda formalidad un límite requiere de mucho ingenio, pues dada una vecindad del límite, se requiere de ingenio encontrar ese momento especial que nos hace caer en dicha vecindad. Para facilitar esta tarea enunciaremos las siguientes propiedades de límites, que nos ayudaran en el cálculo de algunos límites.

6. Propiedades (de límites). Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L \quad \text{y} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = M$$

con $L, M \in \mathbb{R}$. Entonces

(0) $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} c = c$, $c \in \mathbb{R}$

(i) $\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} a_n + b_n = L + M$

(ii) $\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} ca_n = cL$

(iii) $\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} a_n b_n = LM$

(iv) $\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{M}$ (Si $b_n \neq 0$, $M \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

(v) $\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}$ (Si $b_n \neq 0$, $M \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Dem. Los incisos (0) y (i) ya fueron demostrados en la semana. Por lo que nos dedicaremos a demostrar de (ii) a (v).

(ii) Nótese que si $c = 0$, se reduce al inciso (0). Supongase que $c \neq 0$, y sea $\varepsilon > 0$. Como

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} a_n = L$$

entonces para $\frac{\varepsilon}{|c|} > 0$, existe una $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

si $n \geq N$. Entonces

$$|ca_n - cL| = |c|\,|a_n - L| < \varepsilon$$

Por lo tanto tomando $N_0 = N$ queda esto demostrado.

Unas **observaciones**. Nótese que

(1) $\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} a_n = L$ si, y soló si $\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} a_n - L = 0$

(2) $a_n b_n - LM = (a_n - L)(b_n - M) + L\,(b_n - M) + M\,(a_n - L)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Por las observaciones anteriores basta con demostrar que

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} a_n b_n - LM = 0$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$. Como

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} a_n = L$$

entonces para $\sqrt[2]{\varepsilon} > 0$, existe una $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|a_n - L| < \sqrt[2]{\varepsilon}$$

si $n \geq N_1$. Por otro lado, como

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{lím} b_n = M$$

entonces para $\sqrt[2]{\varepsilon} > 0$, existe una $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|b_n - M| < \sqrt[2]{\varepsilon}$$

si $n \geq N_2$. Por lo tanto, si $n \geq N_0 = máx\,\{N_1, N_2\}$

$$|b_n - M|\,|a_n - L| < \sqrt[2]{\varepsilon}\sqrt[2]{\varepsilon}$$

lo cual implica

$$(b_n - M)\,|(a_n - L)\,(b_n - M)| < \varepsilon$$

(iv) Sea $\varepsilon > 0$.

Como $M \neq 0$, por lo que $|M| > 0$. Entonces, como $\{b_n\}$ converge a M, para $\frac{|M|}{2} > 0$, existe una $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$||b_n| - |M|| \leq |b_n - M| < \frac{|M|}{2}$$

si $n \geq N_1$, es decir

$$-\frac{|M|}{2} < |b_n| - |M| < \frac{|M|}{2}$$

de lo cual se sigue

$$\begin{array}{rcl} \frac{|M|}{2} & < & |b_n| \\ \frac{1}{|b_n|} & < & \frac{2}{|M|} \end{array}$$

Por otro lado para $\frac{\varepsilon|M|^2}{2} > 0$, existe una $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|b_n - M| < \frac{\varepsilon\,|M|^2}{2}$$

Entonces, si definimos $N_0 = máx\,\{N_1, N_2\}$, entonces para $n \geq N_0$ se tiene

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{M}\right| \leq \left|\frac{M - b_n}{Mb_n}\right| \leq \frac{|b_n - M|}{|M|\,|b_n|} < \frac{\varepsilon\,|M|^2}{2\,|M|^2} = \varepsilon$$

que es lo que se quería demostrar. ■

A continuación mostremos una proposición que nos será de gran utilidad.

Proposición. Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sucesiones de número reales, tales que, existe un $N \in N$, con la propiedad de que, si $n \geq N$, entonces

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

Si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L = \lim_{n \longrightarrow \infty} c_n$$

con $L \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = L$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$.

Como $\{a_n\}$ converge a L, existe una $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

si $n \geq N_1$. Por otro lado, como $\{c_n\}$ converge a L, existe una $N_2 \in \mathbb{N}$, tal que

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$

si $n \geq N_2$. Por lo tanto, si $N_0 = \textit{máx}\,\{N, N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$, entonces

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon$$

si $n \geq N_0$.

Para finalizar resolvimos el siguiente ejercicio.

7 Ejercicio. Digan si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

(i) Si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |a_n| = L \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L$$

(ii) Si $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L$, con $L > 0$. Entonces existe una N tal que $a_n > 0$, si $n > 0$.

Soluciones.

(i) **Falsa.** Pues tomemos a $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$, y nótese que se cumple el antecedente, pero no el consecuente.

(ii) **Verdadera.**

Dem. Como $\frac{L}{2} > 0$, y

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L$$

entonces existe una $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$-\frac{L}{2} < a_n - L < \frac{L}{2}$$

Si $n \geq N_0$, es decir,

$$0 < \frac{L}{2} < a_n$$

si $n \geq N_0$. ■