Clase del Sábado
3 de Octubre de 2015

1 4Ejercicio. Utilizando la definición demuestre el siguiente límite.

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{l\acute{\imath}m} \sqrt[2]{n+1} - \sqrt[2]{n} = 0$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$. **P.D** $\exists\ N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_0$, entonces

$$\left|\sqrt[2]{n+1} - \sqrt[2]{n}\right| < \varepsilon$$

Como

$$\left|\sqrt[2]{n+1} - \sqrt[2]{n}\right| = \sqrt[2]{n+1} - \sqrt[2]{n} \underset{n>1}{\leq} \frac{1}{\sqrt[2]{n}}$$

Pues

$$\frac{1}{\sqrt[2]{n}} - \left(\sqrt[2]{n+1} - \sqrt[2]{n}\right) = \frac{n+1-\sqrt[2]{n^2-n}}{\sqrt[2]{n}} \in P \;\; (n > 1)$$

Por otro lado, como $\frac{1}{\varepsilon^2} > 0$, entonces por el principio Arquimediano $\exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} + 1 < N \leq n$$

Por lo tanto, si $N = N_0$, entonces para $n \geq N_0$

$$\left|\sqrt[2]{n+1} - \sqrt[2]{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[2]{n}} < \varepsilon$$

Nótese que del ejercicio anterior se demuestra de manera análoga el siguiente límite, a continuación solo daremos las nociones de la demostración, se sugiere que el lector complete los detalles de la prueba.

2. Ejercicio. Utilizando la definición de límite, pruebe lo siguiente.

$$\underset{n\longrightarrow\infty}{l\acute{\imath}m} \sqrt[2]{n-1} - \sqrt[2]{n} = 0$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$. **P.D** $\exists\ N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_0$, entonces

$$\left|\sqrt[2]{n-1} - \sqrt[2]{n}\right| < \varepsilon$$

Como

$$\left|\sqrt[2]{n-1} - \sqrt[2]{n}\right| = -\sqrt[2]{n-1} + \sqrt[2]{n} \underset{n>1}{\leq} \frac{1}{\sqrt[2]{n-1}}$$

Entonces, por el P.A existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} + 1 < N$$

Por lo tanto, si $n \geq N = N_0 \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left|\sqrt[2]{n-1} - \sqrt[2]{n}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[2]{n-1}} < \varepsilon$$

3. Ejercicio (Tarea). Utilizando la definición de límite, pruebe lo siguiente.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[2]{n} - \sqrt[2]{n+1} = 0$$

Ahora utilizando las propiedades de límites calculamos los siguientes límites. Si tiene duda acerca de estas propiedades revise las notas del sábado 26 de Septiembre de 2015.

4. Ejercicios. Calcule los siguientes límites.

$$\begin{aligned}
(i) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n^2+3n}{n^2-2} &= \\
(ii) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n &= \\
(iii) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n} &= \\
(iv) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{3n^2-2n+1}{5n^2-1} &= \\
(v) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2+1}{2n+1} &=
\end{aligned}$$

Respuestas.

$$(i) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n^2+3n}{n^2-2} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}} = 1$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^n &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{\frac{4n}{4}} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{4n}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

$$(iii) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{5} = e^5$$

$$(iv) \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{3n^2-2n+1}{5n^2-1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{5}$$

(v) Se deja al lector.

5 Ejercicio (de la tarea). Supóngase que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$$

Defínase

$$q_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

Demuestre

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} q_n = L$$

Dem. Sea $\varepsilon > 0$.

Obsérvese que para $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Nótese que $\forall M' \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|a_{N+1} + \cdots + a_{N+M} - M'L| < M\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Por lo que

$$\left|\frac{a_{N+1} + \cdots + a_{N+M} - M'L}{N + M'}\right| < \frac{M'}{N + M'}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por otro lado

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{NL}{N + n} = 0$$

6 Ejer. Demuestre la afirmación anterior. Por lo tanto, del ejercicio anterior, $\exists\ N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$

$$\left|\frac{NL}{N + n}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como la sucesión $\{a_n\}$ converge, entonces $\exists\ \tau > 0$ tal que

$$-\tau \leq a_n \leq \tau$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{N\tau}{N + n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N + n} \leq \frac{N\tau}{N + n}$$

Como

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} -\frac{N\tau}{N + n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{N\tau}{N + n} = 0$$

Entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N + n} = 0$$

Por lo que $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, tal que, si $n \geq N_2$, entonces

$$\frac{|a_1 + \cdots + a_N|}{N + n} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Por lo tanto, si $M = máx\,\{N_1, N_2\} \in \mathbb{N}$ y $n \geq M$

$$\left|\frac{NL}{N+n}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad \frac{|a_1 + \cdots + a_N|}{N+n} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces, si $n \geq N + M$, $\exists r \in \mathbb{N}$ tal que $n = (M+N) + r$, por lo que

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{a_1 + \cdots + a_N + \cdots + a_n}{n = (M+N) + r} - L\right| \\
\leq \quad & \frac{|a_1 + \cdots + a_N|}{n} + \left|\frac{a_{N+1} + \cdots + a_n - (M+N)\,L}{n}\right| + \left|\frac{NL}{N+n}\right| \\
< \quad & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto tomando $N_0 = N + M$, se tiene lo deseado. ■

Ahora hablemos un poco acerca de la noción de que una sucesión tienda a ∞.

7 Definición. Diremos que una sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *diverge a* ∞ (infinito), si

$$\forall M \exists N \in \mathbb{N}\,(0 < M \wedge n \geq N \Longrightarrow a_n > M)$$

Si $\{a_n\}$ diverge a ∞ lo denotaremos por

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \infty$$

8. Ejemplo.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} n^2 = \infty$$

Dem. Sea $M > 0$. Como $\sqrt[2]{M} > 0$, entonces por el P.A. $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[2]{M} < N_0$$

Por lo tanto, si $n \geq N_0$, entonces

$$M < n$$

9. Proposición. Sean dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$, tales que, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$

$$a_n \leq b_n$$

Entonces, si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \infty$$

entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = \infty$$

Dem. Sea $M > 0$. Como

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{\text{lím}} a_n = \infty$$

existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N_1$

$$M < a_n$$

Por lo tanto, si $N_0 = \text{máx}\{N, N_1\} \in \mathbb{N}$ y $n \geq N_0$

$$M < a_n \leq b_n$$

10. Observación. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales creciente y no acotada superiormente. Entonces

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{\text{lím}} a_n = \infty$$

Dem. Sea $M > 0$. Como $\{a_n\}$ no está acotada superiormente, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$M < a_{N_0}$$

Por lo tanto, si $n \geq N_0$

$$M < a_{N_0} \leq a_n$$

Pues $\{a_n\}$ es creciente. ■

De manera análoga a la noción de divergencia a ∞ podemos definir la noción de que una sucesión tienda a $-\infty$.

11. Definición. Diremos que una sucesión $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *diverge a* $-\infty$ (menos infinito), si

$$\forall M \exists N \in \mathbb{N} \, (M < 0 \wedge n \geq N \Longrightarrow a_n < M)$$

Si $\{a_n\}$ diverge a $-\infty$ lo denotaremos por

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{\text{lím}} a_n = -\infty$$

12 Ejemplo.

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{\text{lím}} -n = -\infty$$

Dem. Sea $M < 0$. Por el P.A $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$-M < N_0$$

Por lo tanto, si $n \geq N_0$

$$-n < M$$

De manera análoga a la proposición 9 se tiene la siguiente proposición

13. Proposición. Sean dos sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$, tales que, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$

$$a_n \geq b_n$$

Entonces, si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = -\infty$$

entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = -\infty$$

Demostración. Se deja al lector. ∎

13. Observación. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales decreciente y no acotada inferiormente. Entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Dem. Se deja al lector. ∎

Para finalizar esta sección se dejan unos ejercicios para que puedan repasar lo aprendido en esta sección.

Ejercicios

(i) Demuestre con todo detalle las demostraciones dejadas al lector.

(2) Supóngase que tenemos un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$, tal que, para cualquier punto $x \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{d_n\} \subseteq D$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d_n = x$$

y $d_n \neq x$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Responda la siguiente pregunta: ¿D es un conjunto denso en $\mathbb{R}$?

(3) Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

(i) Toda sucesión estrictamente creciente converge a ∞

(ii) Toda sucesión estrictamente decreciente converge a $-\infty$.

(iii) Si $\lim_{n \longrightarrow \infty} |a_n| = \infty$, entonces $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \infty$.

(iv) Si $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = \infty$, entonces $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$.

(v) Si $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = \infty$, entonces $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n - b_n = 0$

(vi) Si $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = \infty$, entonces $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n b_n = \infty$

(vii) Si $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = \infty$, entonces $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

$(viii)$ Si $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = L < 0$, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N_0$, se siga que $a_n < 0$

(4) Suponga que $\underset{n \longrightarrow \infty}{lím} a_n = L$ y $\underset{n \longrightarrow \infty}{lím} b_n = M$, $L < M$. Demuestre, por favor, que existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$, se siga que $a_n < b_n$.

(5) Suponga que $\underset{n \longrightarrow \infty}{lím} a_n = L$ y $a_n \in [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $L \in [0,1]$.

(6) De un ejemplo de una sucesión $\{a_n\} \subseteq (0,1)$, tal que, $\underset{n \longrightarrow \infty}{lím} a_n = L$ pero $L \notin (0,1)$.