Clase del Sábado

17 de octubre de 2015

En esta sesión se resolvierón algunos temas acerca del tema de límites.

1. Ejercicio. Pruebe que en la función

$$\delta\left(x\right)= \begin{matrix} 0 \text{ si } x\in\mathbb{Q}^c \\ 1 \text{ si } x\in\mathbb{Q} \end{matrix}$$

no existe

$$\lim_{x\longrightarrow c}\delta\left(x\right)$$

para cualquier $c\in\mathbb{R}$.

Dem. Sea $c\in\mathbb{R}$, supongamos que

$$\lim_{x\longrightarrow c}\delta\left(x\right)=L\in\mathbb{R}$$

Como $c\in\mathbb{R}$, entonces existen $\{q_n\}\subseteq\mathbb{Q}$ y $\{i_n\}\subseteq\mathbb{Q}^c$ tales que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}q_n=c=\lim_{n\longrightarrow\infty}i_n$$

con $q_n,i_n\neq c\ \forall n\in\mathbb{N}$. Como $\lim_{x\longrightarrow c}\delta\left(x\right)$ existe, entonces $\lim_{n\longrightarrow\infty}\delta\left(q_n\right)=L=\lim_{n\longrightarrow\infty}\delta\left(i_n\right)$. Por otro lado,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\delta\left(q_n\right)=1 \text{ y } \lim_{n\longrightarrow\infty}\delta\left(i_n\right)=0$$

Entonces $1=0!$■

2. Ejercicio. Pruebe que si T denota la función tienda (definida en apuntes anteriores), entonces

$$\lim_{x\longrightarrow\frac{1}{2}}T(x)=1$$

Dem. Basta probar que

$$\lim_{x\longrightarrow\frac{1}{2}^+}T(x)=1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\longrightarrow\frac{1}{2}^-}T(x)=1$$

Probemos el primer límite.
Sea $\varepsilon>0$.
Como

$$\left|T\left(x\right)-1\right|=\left|-2x+1\right|=\left|2\right|\left|x-\frac{1}{2}\right|=2\left(x-\frac{1}{2}\right)<2\delta=\varepsilon$$

Por lo tanto, si

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$$

se obtiene lo deseado.

La demostración del segundo inciso es análoga y queda como ejercicio.

3. Ejercicio. De un ejemplo de una función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que no esté definido su límite en los números naturales, pero en el resto si lo este.

Solución. Tome la función.

$$f(x) = \begin{matrix} 0 \text{ si } x \in (-\infty, 0] \\ n+1 \text{ si } x \in (n, n+1] \text{ p.a } n \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

Entonces, si $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\lim_{x \longrightarrow m^+} f(x) = m + 1$$

y

$$\lim_{x \longrightarrow m^-} f(x) = m$$

por lo tanto no existe límite, pues el límite por la derecha y la izquierda no existe. *(Ejercicio complete los detalles de esta demostración)*

4. Ejercicio. De un ejemplo de una función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que no esté definido su límite en un sólo punto, pero en el resto si lo este.

5. Ejercicio. Calcule los siguientes límites.

(i) $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} =$

(ii) $\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} =$

(iii) $\lim_{x \longrightarrow y} \frac{x^n-y^n}{x-y} =$

(iv) $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} =$

Soluciones.

(i) Se deja como ejercicio.

(ii)

$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \longrightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 2^2 + 2(2) + 4 = 12$$

(iii)

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow y} \frac{x^n - y^n}{x - y} &= \lim_{x \longrightarrow y} x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} \\ &= y^{n-1} + y^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} \\ &= ny^{n-1} \end{aligned}$$

(iv) Ejercicio

6. Ejercicio. Suponga que, para todo número natural n, A_n es un conjunto finito de números en $[0,1]$ y que A_n A_m carecen de elementos comunes si $m \neq n$. Defínase como f

$$f(x) = \begin{matrix} \frac{1}{n}, \text{ si } x \in An \\ 0, \text{ si } x \notin An\ \forall n \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

Demostrar que

$$\lim_{x \longrightarrow c} f(x)$$

existe.

DEM. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces por el P.A, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

Definamos

$$\delta_m = \min\{|x-a| : x \in A_m \text{ y } x \neq a\}$$

y

$$\delta = \min\{\delta_m : 1 \leq m \leq N\}$$

Entonces si

$$0 < |x-a| < \delta$$

entonces

$$|f(x)| = 0 \ \text{ o } \ |f(x)| = \frac{1}{n}$$

con $n \geq N$. Por lo tanto, $|f(x)| < \varepsilon$ si $0 < |x-a| < \delta$.