Clase del Sábado

24 de Octubre de 2015

En esta clase nos dedicamos a resolver ejercicios acerca del tema de continuidad, y ver algunas consecuencias del siguiente teorema mostrado en la semana.

1. Teorema (Primer Teorema Fuerte). *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *y* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a, b]$. *Si* $f(a) < 0$ *y* $f(b) > 0$, *entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Lista de Ejercicios.

(1) Utilizando la definición de continuidad, demuestre, por favor, que la función

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{array}{c} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \end{array}$$

es continua en 09.

Dem. Mostremos que

$$\underset{x\longrightarrow 0}{lím} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$. P.D. $\exists\ \delta > 0$ tal que, si $0 < |x| < \delta$, entonces $\left|x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon$.

Como

$$\left|x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|^2 \left|sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

Por lo tanto, si $\delta = \sqrt[2]{\varepsilon} > 0$ y $0 < |x| < \delta$ se sigue que

$$\left|x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \varepsilon$$

(2) Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones. De las siguientes afirmaciones diga cuales son verdaderas y cuales son falsas. Justificando su respuesta.

(i) Si f, g son discontinuas en $a = 1$, entonces $f + g$ es discontinua en $a = 1$.

(ii) Si f es discontinua en $a = 3$, entonces $|f|$ es discontinua en 3.

(iii) Si f, g son funciones acotadas en $\mathbb{R}$, entonces $f + g$ es acotada en $\mathbb{R}$.

Soluciones

(i) **Falso**

Contraejemplo. Defínase las funciones

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{array}{c} 1 \;\; \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ -1 \;\; \text{si } x \in [1, \infty) \end{array} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{array}{c} -1 \;\; \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ 1 \;\; \text{si } x \in [1, \infty) \end{array} \end{array}$$

de las definiciones es inmediato verificar que f y g son discontinuas en 1, y que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0$$

Por lo que la función $f+g$ es la constante 0, la cual es continua en 0.

(ii) Ejercicio. *Hint.* Retome el inciso anterior.

(iii) **Verdadero.**

Dem. Como f y g son acotadas en $\mathbb{R}$ existen M_1, $M_2 > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq M_1 \text{ y } |g(x)| \leq M_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

es decir, $M_1 + M_2 > 0$ es una cota para $f+g$.

(3) . Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones continuas en $\mathbb{R}$. Demuestre los siguientes incisos.

(i) Si $f(r) = g(r)\ \forall r \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tales que, $f(a) < g(a)$ y $g(b) < f(b)$, entonces existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

(iii) Si $g(x_0) < f(x_0)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Demostraciones.

(i) Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces existe $\{q_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ tal que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} q_n = x$$

y $q_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Como f, g son continuas, entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(q_n) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} g(q_n) = g(x)$$

Por otro lado, $f(q_n) = g(q_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} g(q_n)$$

Por lo tanto $f(x) = g(x)$.

(ii) Definamos

$$\begin{array}{rccc} h: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) - g(x) \end{array}$$

Apartir de la definición de h es inmediato verificar que h es continua en $[a,b]$, y que $h(a) < 0 < h(b)$. Por el P.T.F existe $c \in (a,b)$ tal que $h(c) = 0$. Por lo tanto $f(c) = g(c)$ para algún $c \in (a,b)$.

(iii) Se deja como ejercicio.

(4) Sea $f : I = [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua en I. Demuestre por favor los siguientes resultados.

(i) Existe $x \in I$ tal que $f(x) = x$

(ii) Si f es suprayectiva. Entonces para toda función $g : I \longrightarrow I$ continua, existe un $x \in I$ tal que $f(x) = g(x)$.

Demostración.

(i) Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$ se obtiene lo deseado.

Si $f(0) \neq 0$ y $f(1) \neq 1$, entonces $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Por lo que definiendo

$$\begin{array}{rccc} h: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x - f(x) \end{array}$$

se tiene que h es continua en I y que $h(0) < 0 < h(1)$. Por el P.T.F existe un $x \in I$ tal que $f(x) = x$.

(ii) Sea $g : I \longrightarrow I$ una función continua

Como f es suprayectiva existen $a, b \in I$ tales que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$. S.P.G supóngase que $a < b$.

Si $f(a) = g(a)$ o $f(b) = g(b)$ se obtiene lo deseado. Por otro lado, si $f(a) \neq g(a)$ y $f(b) \neq g(b)$, entonces $f(a) < g(a)$ y $g(b) < f(b)$. Por $(3.ii)$ existe $x \in (a,b) \subseteq I$ tal que $f(x) = g(x)$.

Definición. Diremos que una función

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

cumple con la *condición de Lipschitz* en $\mathbb{R}$. Si existe un $c > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(5) Demuestre lo siguiente.

(i) La función $f(x) = 7x - 5$ satisface la condición de Lipschitz.

(ii) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición de Lipschitz, entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(iii) La función $f(x) = x^2$ no satisface la condición de Lipschitz.

Demostración.

(i) Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Como

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(7x - 5) - (7y - 5)| = |7x - 5 - 7y + 5| \\ &= |7x - 7y| = 7\,|x - y| \end{aligned}$$

Por lo tanto tomando $c = 7$ se obtiene lo deseado.

(ii) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostremos que

$$\underset{x \longrightarrow x_0}{lím} f(x) = f(x_0)$$

Sea $\varepsilon > 0$. P.D $\exists\, \delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Como f satisface la condición de Lipschitz, entonces existe $c > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c\,|x - x_0|$$

por lo que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq c\,|x - x_0| < c\delta = \varepsilon$$

Por lo tanto tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$ se obtiene lo deseado.

(iii) Ejercicio.