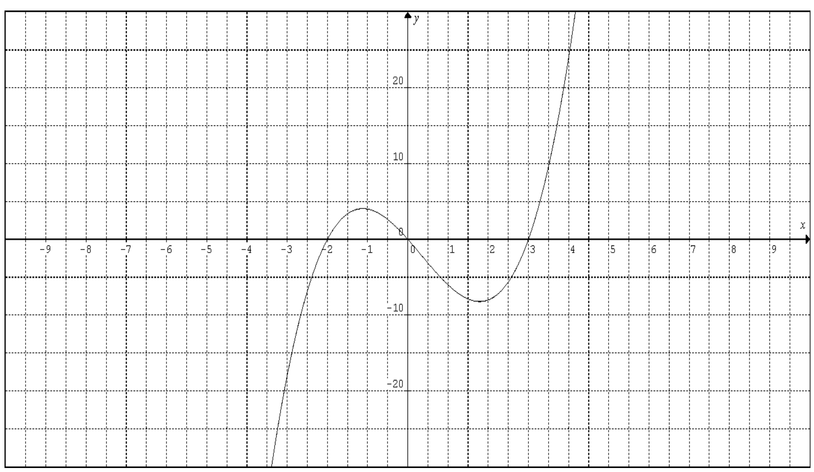
Clase del Sábado

14 de Noviembre de 2015

En esta sesión se introdujo la siguiente definición

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, decimos que $a \in A$ es un *máximo local (mínimo local)* de f en A, si existe un $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq A$ y a es máximo (mínimo) de f en $(a - \delta, a + \delta)$.

Es decir, un máximo o mínimo local de una función f es un punto de su dominio para el cual podemos encontrar una vecindad del punto que se queda contenida en el dominio y que dentro de dicha vecindad ese punto se comporta como un máximo (mínimo) bueno. De la gráfica de la siguiente función es inmediato ver que posee máximos y mínimos locales.



Después de introducida dicha definición vamos a probar los siguientes teoremas que quedaron como deuda de la clase del viernes 13 de noviembre.

Teorema 2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $x \in (a, b)$ es máximo (mínimo) de f y f es derivable en x, entonces $f'(x) = 0$.

Demostración. (Caso máximo) Obsérvese que si h es un número cualquiera tal que $x + h \in (a, b)$, entonces

$$f(x + h) \leq f(x)$$

Por lo que, si $h > 0$ tenemos

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq 0$$

y en consecuencia

$$f'_{+}(x) = \underset{h \longrightarrow 0^{+}}{lím} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0 \quad \ldots (1)$$

Puesto que f es diferenciable en x.

Por otro lado, si $h < 0$ se tiene

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

y en consecuencia

$$f'_{-}(x) = \underset{h \longrightarrow 0^{-}}{lím} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \ldots (2)$$

Entonces por (1) y (2)

$$f'(x) = 0$$

Caso mínimo es análogo y se deja como ejercicio. ■

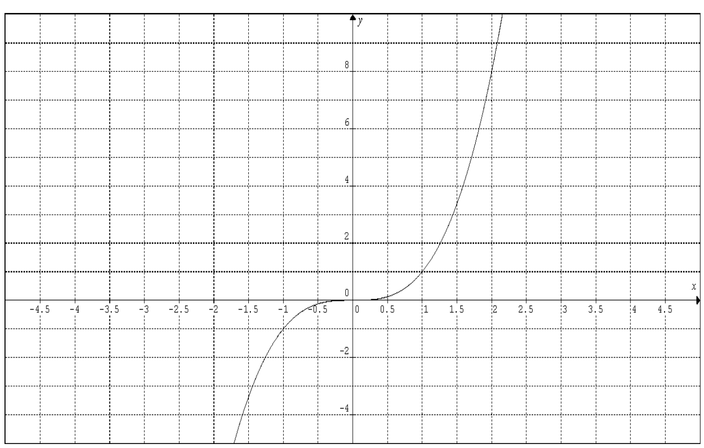
Teorema 3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si $x \in (a, b)$ es máximo local (mínimo local) de f y f es derivable en x, entonces $f'(x) = 0$.

Dem. Es consecuencia inmediata del teorema anterior. ■

A partir de dichos teoremas, dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con A un intervalo abierto (cerrado); si deseamos calcular un punto máximo (mínimo) local de f lo que hacemos es buscar un punto donde su derivada se anule y ver si este cumple con ser máximo (mínimo) local, puesto que cabe mencionar que si un punto tiene derivada nula este no precisamente máximo o mínimo. Pues al considerar la función

$$f(x) = x^3$$

en el intervalo $[-1, 1]$



vemos que el punto 0 satisface que $f'(0) = 3(0)^2 = 0$, pero este no es mínimo local y no es máximo local. Por lo que podemos concluir que el reciproco del teorema 2 y 3 no siempre es cierto.

Pagadas dichas deudas se resolvieron los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \begin{matrix} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ si } x < 0 \end{matrix}$$

Calcule f', f'', f''' en los puntos donde estos se puedan definir, también grafique dichas funciones.

Solución. Nótese que si $x \in (-\infty, 0)$ entonces $f'(x) = -2x$. Mientras que si $x \in (0, \infty)$ $f'(x) = 2x$.

A continuación veamos que si f' está definida en 0, para ello veamos si la derivada por la izquierda y derecha coinciden.

Como

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} h = 0 \end{aligned}$$

Por otro lado Por lo que $f'(0) = 0$. Por lo tanto

$$f'(x) = \begin{matrix} -2x \text{ si } x \in (-\infty, 0) \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 2x \text{ si } x \in (0, \infty) \end{matrix}$$

Ahora calculemos $f''(x)$. Para ello es inmediato ver que si $x \in (-\infty, 0)$ entonces $f''(x) = -2$. Mientras que si $x \in (0, \infty)$ $f''(x) = 2$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{2h - 0}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} 2 = 2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{-2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0-} -2 = -2 \end{aligned}$$

De lo cual es inmediato ver que f'' no está definida en 0.

De estos cálculos se sigue que $f'''(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \diagdown \{0\}$. ■

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$. Suponte que $f'(0) = 1$ y f' es continua en 0. Demuestra que $\exists \ \delta > 0$ tal que para todo s y t en $(-\delta, \delta)$, si $s < t$, entonces $f(s) < f(t)$.

Dem. Como $f'(0) = 1 < 0$ y f' es continua en 0, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (-\delta, \delta)$ se tenga que $f'(x) > 0$. Entonces f es creciente en $(-\delta, \delta)$. Por lo tanto si $s, t \in (-\delta, \delta)$, $s < t$, entonces $f(s) < f(t)$. ■

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{matrix} x^2 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{matrix}$$

¿Dónde es derivable está función?

Solución. Vemos que es derivable en 0 y

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$$

Dem. Sea $\epsilon > 0$.

Vemos que si $h \in \mathbb{Q}$, entonces

$$\left| \frac{f(0+h) - f(0)}{h} - 0 \right| = \left| \frac{h^2 - 0}{h} \right| = |h| < \delta$$

Por otro lado, si $h \notin \mathbb{Q}$, entonces

$$\left| \frac{f(0+h) - f(0)}{h} - 0 \right| = \left| \frac{0 - 0}{h} \right| = |0| < \epsilon$$

Por lo tanto, tomando $\delta = \epsilon > 0$ se obtiene lo deseado. ■

Conjetura. f no es derivable si $x \neq 0$.

Dem.(Contraejemplo). Tú puedes. ■

Ejercicio 5. Para no perder la esencia del cálculo diferencial. Encuentre las dimensiones del cilindro con mayor volumen inscrito en una esfera con radio $R > 0$.

Solución. Tú puedes.