Definición 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $a \in A$. Se dice que un número real L es un límite de f en a si, dada cualquier vecindad ϵ, $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ de L, existe una vecindad δ, $(a-\delta, a+\delta)$ de c tal que si $x \neq a$ es un punto cualquiera de $x \in (a-\delta, a+\delta)$, entonces $f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ y se denota*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Ejemplo Usando la definición muestre que

$$\lim_{x\to 2} x+1 = 3$$

Solución En este caso se tiene

$$f(x) \in (3-\epsilon, 3+\epsilon) \iff x+1 \in (3-\epsilon, 3+\epsilon) \iff 3-\epsilon < x+1 < 3+\epsilon \iff$$

$$3-\epsilon-1 < x < 3+\epsilon-1 \iff 2-\epsilon < x < 2+\epsilon$$

De esta manera podemos tomar $\delta = \epsilon$ es decir

$$f(x) \in (3-\epsilon, 3+\epsilon) \iff f(x) \in (3-\delta, 3+\delta) \iff x+1 \in (3-\delta, 3+\delta) \iff 3-\delta < x+1 < 3+\delta \iff$$

$$3-\delta-1 < x < 3+\delta-1 \iff 2-\delta < x < 2+\delta \iff x \in (2-\delta, 2+\delta)$$

Ejemplo Usando la definición muestre que

$$\lim_{x\to 2} 3x-1 = 5$$

Solución En este caso se tiene

$$f(x) \in (5-\epsilon, 5+\epsilon) \iff 3x-1 \in (5-\epsilon, 5+\epsilon) \iff 5-\epsilon < 3x-1 < 5+\epsilon \iff 5-\epsilon+1 < 3x < 5+\epsilon+1$$

$$\iff 6-\epsilon < 3x < 6+\epsilon \iff 2-\frac{\epsilon}{3} < x < 2+\frac{\epsilon}{3}$$

De esta manera podemos tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$ es decir

$$f(x) \in (5-\epsilon, 5+\epsilon) \iff 3x-1 \in (5-\epsilon, 5+\epsilon) \iff 5-\epsilon < 3x-1 < 5+\epsilon \iff 5-\epsilon+1 < 3x < 5+\epsilon+1$$

$$\iff 6-\epsilon < 3x < 6+\epsilon \iff 2-\frac{\epsilon}{3} < x < 2+\frac{\epsilon}{3} \iff 2-\delta < x < 2+\delta \iff x \in (2-\delta, 2+\delta)$$

De esta manera podemos tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$

Definición 2. *Dados una función f y los números "a" y "L" se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" es "L" si para todo número positivo $\varepsilon > 0$ tan pequeño como se desee, existe un número positivo $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$*

Teorema 1. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea c un punto de A; entonces*
a)

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

b)

$$\forall \ \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

son equivalentes

Demostración. $a \Rightarrow b$ supongase que f tiene limite L en c. Entonces si $x \in (c-\delta, c+\delta)$ implica $c-\delta < x < c+\delta$ y por tanto $0 < |x-c| < \delta$ mientras que $f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ quiere decir $L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon$ es decir $|f(x)-L| < \epsilon$
$a \Leftarrow b$ Se puede tomar el regreso de la prueba anterior □

Ejemplo Use la definición de limite para demostrar que

$$\lim_{x\to 2} 4x-5 = 3$$

Solución buscando una δ adecuada Para esto se tiene que

$$|f(x)-L| = |4x-5-3| = |4x-8| = |4(x-2)| = |4||x-2|$$

por lo tanto

$$|f(x)-L| < \epsilon \;\Rightarrow\; |4||x-2| < \epsilon \;\Rightarrow\; |x-2| < \frac{\epsilon}{4}$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$ entonces

$$\begin{aligned} 0 < |x-2| < \delta \;&\Rightarrow\; |x-2| < \delta \\ &\Rightarrow\; |x-2| < \frac{\epsilon}{4} \\ &\Rightarrow\; 4|x-2| < \epsilon \\ &\Rightarrow\; |4x-8| < \epsilon \\ &\Rightarrow\; |(4x-5)-3| < \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 2} 4x-5 = 3$$

□

Ejemplo Use la definición de limite para demostrar que

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-18}{x-3} = 12$$

Solución buscando una δ adecuada Para esto se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x)-L| = \left|\frac{2x^2-18}{x-3} - 12\right| = \left|\frac{2(x^2-9)}{x-3} - 12\right| = \left|\frac{2(x+3)(x-3)}{x-3} - 12\right| &= |2x+6-12| \\ &= |2(x-3)| = 2|x-3| \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|f(x)-L| < \epsilon \;\Rightarrow\; 2|x-3| < \epsilon \;\Rightarrow\; |x-3| < \frac{\epsilon}{2}$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ entonces

$$\begin{aligned} 0 < |x-3| < \delta \ &\Rightarrow \ |x-3| < \delta \\ &\Rightarrow \ |x-3| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ 2|x-3| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ |2x-6| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ |2x+6-12| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ \left|\frac{2x^2-18}{x-3} - 12\right| < \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-18}{x-3} = 12$$

□

Ejemplo Use la definición de limite para demostrar que

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

Solución buscando una δ adecuada Para esto se tiene que

$$|f(x) - L| = \left|x^2 - 4\right| = |(x+2)(x-2)| = |x+2|\,|x-2|$$

por lo tanto

$$|f(x) - L| < \epsilon \ \Rightarrow \ |x+2|\,|x-2| < \epsilon$$

Supongamos que $\delta_1 \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned} 0 < |x-2| < \delta_1 \ &\Rightarrow \ |x-2| < 1 \\ &\Rightarrow \ -1 < x-2 < 1 \\ &\Rightarrow \ 1 < x < 3 \\ &\Rightarrow \ 3 < x+2 < 5 \\ &\Rightarrow \ |x+2| < 5 \end{aligned}$$

entonces cuando $|x-2| < 1$ se tiene que $|x+2| < 5$
como buscamos

$$|x+2|\,|x-2| \ < \ \epsilon$$

además de $|x-2| < 1$, queremos $|x-2| < \frac{\epsilon}{5}$
para garantizar

$$|x+2|\,|x-2| \ < 5\,\frac{\epsilon}{5} = \epsilon$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{5}\right\}$ entonces

$$\begin{aligned} 0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; |x-2| < 1 \quad y \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{5} \\ \Rightarrow\; -1 < x-2 < 1 \quad y \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{5} \\ \Rightarrow\; 3 < x+2 < 5 \quad y \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{5} \\ \Rightarrow\; |x+2| < 5 \quad y \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{5} \\ \Rightarrow\; |x+2|\;|x-2| \; < 5\;\frac{\epsilon}{5} = \epsilon \\ \Rightarrow\; \left|x^2-4\right| < \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

□

Lema 1. *Una función f no tiene limite L en x_0 si y solo si*

$$\exists\, \epsilon > 0 \;\; tal \;\; que \;\; \forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, x \in \; Dom_f \;\; tal \;\; que \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\; y \;\; |f(x) - L| \geq \epsilon$$

Demostración. Una función f no tiene limite L en $x_0 \Leftrightarrow$

$$es \;\; falso \;\; (\,\forall\, \epsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 \;\; tal \;\; que \;\; \forall\, x \in \; Dom_f, \;\; con \;\; 0 < |x-x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon\,)$$

$$\Leftrightarrow\; \exists\, \epsilon > 0 \;\; tal \;\; que \;\; es \;\; falso \;\; (\exists\, \delta > 0 \;\; tal \;\; que \;\; \forall\, x \in \; Dom_f, \;\; con \;\; 0 < |x-x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-L| < \epsilon\,)$$

$$\Leftrightarrow\; \exists\, \epsilon > 0 \;\; tal \;\; que \;\; \forall\, \delta > 0 \;\; es \;\; falso \;\; (\,\forall\, x \in \; Dom_f, \;\; con \;\; 0 < |x-x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon\,)$$

$$\Leftrightarrow\; \exists\, \epsilon > 0 \;\; tal \;\; que \;\; \forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, x \in \; Dom_f \;\; tal \;\; que \;\; es \;\; falso \;\; (\;\; 0 < |x-x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon\,)$$

$$\Leftrightarrow\; \exists\, \epsilon > 0 \;\; tal \;\; que \;\; \forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, x \in \; Dom_f \;\; tal \;\; que \;\; 0 < |x-x_0| < \delta \;\; pero \;\; |f(x) - L| \geq \epsilon$$

□

Ejemplo Muestre que

$$f(x) = \frac{1}{x} \;\; no \;\; tiene \;\; limite \;\; en \;\; x_0 = 0$$

Solución Sea $\delta > 0$, si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\frac{1}{\delta} < n$ entonces $\frac{1}{n} < \delta$

supongamos que $L > 0$, sea $x = \dfrac{1}{n+L}$ y sea $\epsilon = \dfrac{n}{2}$

por lo tanto

$$|x - 0| = \left|\frac{1}{n+L}\right| = \frac{1}{n+L} < \frac{1}{n} < \delta$$

pero

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{x} - L\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n+L}} - L\right| = |n + L - L| = |n| \geq \frac{n}{2}$$