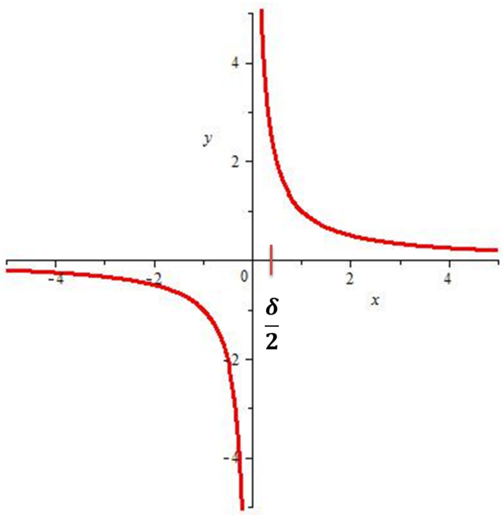
Ejemplo Muestre que

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad no \ \ tiene \ \ limite \ \ en \ \ x_0 = 0$$

Solución Suponemos que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = L$, esto quiere decir

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0 \ \ tal \ \ que \ \ |x - 0| < \delta \ \Rightarrow \ \left|\frac{1}{x} - L\right| < \epsilon$$



En este caso consideremos

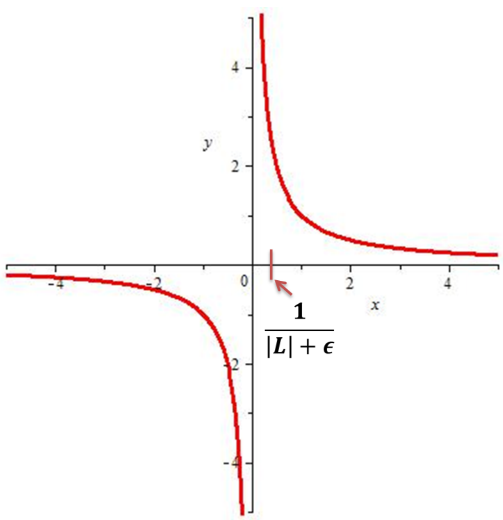
$$x = \text{mín}\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{1}{|L| + \epsilon}\right\}$$

con $x = \frac{\delta}{2}$ se tiene que

$$|x - 0| = |x| = \left|\frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

pero

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{\frac{\delta}{2}} - L\right| = \left|\frac{2}{\delta} - L\right| > \frac{\left|\frac{2}{\delta} - L\right|}{2}$$



con $x = \frac{1}{|L| + \epsilon}$ se tiene que

$$|x - 0| = |x| = \left|\frac{1}{|L| + \epsilon}\right| < \left|\frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

pero

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{\frac{1}{|L|+\epsilon}} - L\right| = ||L| + \epsilon - L|$$

$$= \begin{cases} \epsilon > \frac{\epsilon}{2} & si \quad L > 0 \\ |\epsilon - 2L| > \frac{|\epsilon - 2L|}{2} & si \quad L < 0 \end{cases}$$

En cualquier caso se tiene

$$|x - 0| < \delta \ \ pero \ \ |f(x) - L| \geq \epsilon$$

por lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ \nexists$$

Ejemplo Muestre que

$$f(x) = \frac{1}{x-a} \quad no \;\; tiene \;\; limite \;\; en \;\; x_0 = a$$

Solución Suponemos que $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x-a} = L$, esto quiere decir

$$\forall\, \epsilon > 0, \;\exists\, \delta > 0 \;\; tal \;\; que \;\; |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{x-a} - L\right| < \epsilon$$

En este caso consideremos

$$x = \text{mín}\left\{a + \frac{\delta}{2}, a + \frac{1}{|L| + \epsilon}\right\}$$

con $x = \frac{a+\delta}{2}$ se tiene que

$$|x-a| = \left|a + \frac{\delta}{2} - a\right| = \left|\frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

pero

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{a + \frac{\delta}{2} - a} - L\right| = \left|\frac{2}{\delta} - L\right| > \frac{\left|\frac{2}{\delta} - L\right|}{2}$$

con $x = a + \frac{1}{|L| + \epsilon}$ se tiene que

$$|x-a| = \left|\frac{1}{a + |L| + \epsilon - a}\right| < \left|\frac{1}{|L| + \epsilon}\right| = \frac{1}{|L| + \epsilon} < \frac{\delta}{2} < \delta$$

pero

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{\frac{1}{a+|L|+\epsilon-a}} - L\right| = ||L| + \epsilon - L| = \begin{cases} \epsilon > \frac{\epsilon}{2} & si \quad L > 0 \\ |\epsilon - 2L| > \frac{|\epsilon - 2L|}{2} & si \quad L < 0 \end{cases}$$

En cualquier caso se tiene

$$|x-a| < \delta \;\; pero \;\; |f(x) - L| \geq \epsilon$$

por lo que

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a} \;\; \nexists$$

Límite a través de sucesiones

Teorema 1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, y a A. Entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ \Leftrightarrow \ \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L \ \ \forall \ sucesión \ \{x_n\} \in \ A \ \ con \ \ x_n \to a$$

Demostración. ⇒ Supongamos que
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
como a es punto de A entonces $\forall\ \delta > 0$ el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ cumple que

$$(a-\delta, a+\delta) \bigcap (A - \{a\}) \neq \emptyset$$

por lo tanto consideramos $\delta = \dfrac{1}{n}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, llamamos x_n al punto de

$$\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \bigcap (A - \{a\})$$

y se tiene que $0 < |x - a| < \dfrac{1}{n}$ y comoi
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
$$\forall\ \epsilon \ > \ 0, \ \ \exists\ \delta \ > 0 \ \ tal \ \ que \ \ 0 \ < \ |x - a| \ < \ \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| \ < \ \epsilon$$
para esta δ elegimos $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 \ < \ |x_n - a| \ < \ \delta \ forall \ n > p$, por lo tanto

$$|f(x_n) - L| \ < \ \epsilon, \ \ \forall\ n > p \quad \therefore \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$$

⇐ Supongamos que $\forall\ sucesión \ \{x_n\} \in \ A - \{a\} \ \ con \ \ x_n \to a$ y supongamos que f no tiene limite en L cuando $x \to a$, esto quiere decir

$$\exists\ \epsilon > 0 \ \ tal \ \ que \ \ \forall\ \delta > 0 \ \ \exists\ x \in \ Dom_f \ \ tal \ \ que \ \ 0 < |x - a| < \delta \ \ pero \ \ |f(x) - L| \geq \epsilon$$

fijamos $\epsilon > 0$ y tomamos $\delta = 1, \ \dfrac{1}{2}, \ \dfrac{1}{3}, ..., \ \dfrac{1}{n}, ...$ Tenemos entonces que

$$\exists\ x_1 \in \ Dom_f \ \ tal \ \ que \ \ 0 < |x_1 - a| < 1 \ \ pero \ \ |f(x_1) - L| \geq \epsilon$$

$$\exists\ x_2 \in \ Dom_f \ \ tal \ \ que \ \ 0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2} \ \ pero \ \ |f(x_2) - L| \geq \epsilon$$

$$\exists\ x_3 \in \ Dom_f \ \ tal \ \ que \ \ 0 < |x_3 - a| < \frac{1}{3} \ \ pero \ \ |f(x_3) - L| \geq \epsilon$$

$$\vdots$$

$$\exists\ x_n \in \ Dom_f \ \ tal \ \ que \ \ 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \ \ pero \ \ |f(x_n) - L| \geq \epsilon$$

$$\vdots$$

construimos de esta manera una sucesión $\{x_n\} \in \ A - \{a\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \textit{pero} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L \quad \textit{contradicción}$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to a} f(x) = L$$

$\square$

Ejemplo Usando el criterio por sucesiones, probar que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \nexists$$

Solución Consideremos las sucesiones de término general

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \quad y \quad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

tenemos entonces que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} = 0$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = 0$$

Mientras que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{n\pi}}\right) \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(n\pi) = 0$$

y también

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}}\right) \lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} f(x) \quad \nexists$$

Cambio de Variable

Teorema 2. *Supongamos que*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0 \quad y \quad \lim_{u\to u_0} f(u) = L$$

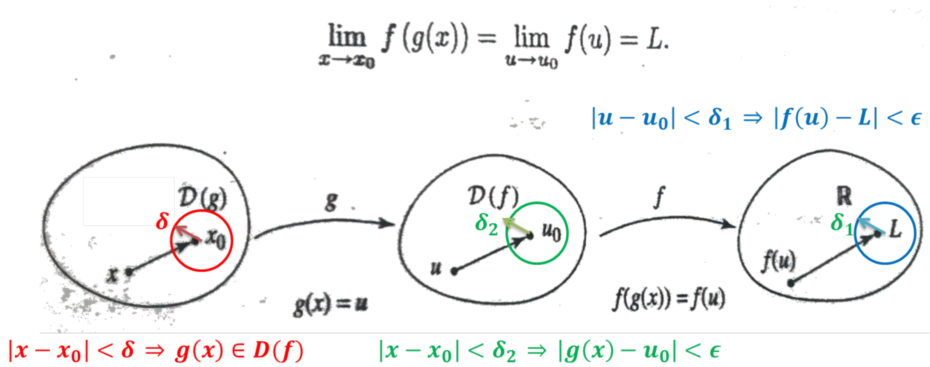
donde x_0, u_0 *son puntos de* Dom_g, Dom_f *respectivamente y* $g(x) \in\ Dom_f - \{u_0\}\ \forall\, x \in\ Dom_g$ *entonces*

$$\lim_{x\to\ x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = L$$

Demostración. Supongamos que

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0 \quad y \quad \lim_{u\to u_0} f(u) = L$$

$$y \quad \exists\, \delta > 0 \ \ tal \ \ que \ \ \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \bigcap (Dom_g - \{x_0\})\,,\ g(x) \in \ \ (Dom_f - \{u_0\})$$



Sea $\epsilon > 0$ y como

$$\lim_{u\to u_0} f(u) = L, \quad \exists \ \ \delta_1 > 0 \ \ tal \ \ que \ \ \forall\, u \in \ \ Dom_f, \ \ 0 < |u - u_0| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(u) - L| < \epsilon$$

como

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0, \quad \exists \ \ \delta_2 > 0 \ \ tal \ \ que \ \ \forall\, u \in \ \ Dom_g, \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |g(x) - u_0| < \delta_1$$

elegimos $\delta_3 = \min\{\delta,\ \delta_2\}$. Entonces $\forall\, x \in\ \ Dom_{f(g)},\ \ x \in\ \ Dom_g$ y

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta_3 \ &\Rightarrow \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ y \ \ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \\ &\Rightarrow \ g(x) \ \in \ Dom_f - \{u_0\}, \quad y \quad |g(x) - u_0| < \delta_1 \\ &\Rightarrow \ g(x) \ \in \ Dom_f, \quad y \quad 0 < |g(x) - u_0| < \delta_1 \\ &\Rightarrow \ |f(g(x)) - L| < \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty x_0} f(g(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = L$$

□

Ejemplo Calcular

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$

Solución Tomando $x+1=y^6$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}$$

Ejemplo Calcular

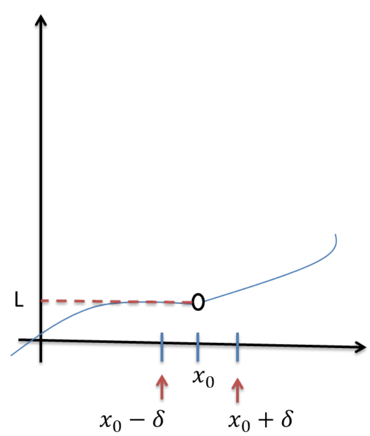
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

Solución Tomando $x=y^2$ se tiene que

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2}$$

Límites Laterales

Definición 1. *Si $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y x_0 es un punto de D, decimos que ℓ_d es límite de f en x_0 por la derecha si*



$$\forall\ \ \epsilon>0\ \ \exists\ \ \delta_\epsilon>0\ \ \ni\ \ |f(x)-\ell_d|<\epsilon\ \ si\ \ 0<x-x_0<\delta_\epsilon$$

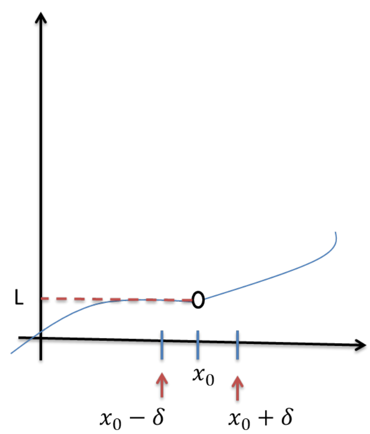
es decir

$$\forall\ \ \epsilon>0\ \ \exists\ \ \delta_\epsilon>0\ \ \ni\ \ |f(x)-\ell_d|<\epsilon\ \ si\ \ x_0<x<x_0+\delta$$

El límite por la derecha se denota

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell_d$$

Definición 2. *Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y x_0 es un punto de acumulación de D, decimos que ℓ_i es límite de f en x_0 por la izquierda si*



$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta_\epsilon > 0 \quad \ni \quad |f(x) - \ell_i| < \epsilon \quad si \quad 0 < x_0 - x < \delta_\epsilon$$

es decir

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta_\epsilon > 0 \quad \ni \quad |f(x) - \ell_i| < \epsilon \quad si \quad x_0 - \delta < x < x_0$$

El límite por la izquierda se denota

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_i$$