Límites Laterales

Definición 1. *Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y x_0 es un punto de D, decimos que ℓ_d es límite de f en x_0 por la derecha si*

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta_\epsilon > 0 \quad \ni \quad |f(x) - \ell_d| < \epsilon \quad si \quad 0 < x - x_0 < \delta_\epsilon$$

es decir

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta_\epsilon > 0 \quad \ni \quad |f(x) - \ell_d| < \epsilon \quad si \quad x_0 < x < x_0 + \delta$$

El límite por la derecha se denota

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_d$$

Ejemplo *Probar que*

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = 1$$

Solución *Sea $\epsilon > 0$, sea $\delta > 0$ entonces*

$$0 \ < \ x - 2 \ < \ \delta \ \Rightarrow \ 2 \ < \ x \ < \ 2 + \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{|x-2|}{x-2} - 1 \right| = \left| \frac{x-2}{x-2} - 1 \right| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = 1$$

Ejemplo *Probar que*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + x^2}{|x|} = 1, \quad |x| \neq 0$$

Solución *Sea $\epsilon > 0$, sea $\epsilon = \delta > 0$ entonces*

$$0 \ < \ x \ < \ \delta \ \Rightarrow \ \left| \frac{x + x^2}{|x|} - 1 \right| = \left| \frac{x + x^2}{x} - 1 \right| = |1 + x - 1| = |x| < \delta = \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + x^2}{|x|} = 1$$

Definición 2. *Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y x_0 es un punto de acumulación de D, decimos que ℓ_i es límite de f en x_0 por la izquierda si*

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta_\epsilon > 0 \quad \ni \quad |f(x) - \ell_i| < \epsilon \quad si \quad 0 < x_0 - x < \delta_\epsilon$$

es decir

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta_\epsilon > 0 \quad \ni \quad |f(x) - \ell_i| < \epsilon \quad si \quad x_0 - \delta < x < x_0$$

El límite por la izquierda se denota

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_i$$

Ejemplo Probar que

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=-1$$

Solución Sea $\epsilon>0$, sea $\delta>0$ entonces

$$0\ <\ 2-x\ <\ \delta\ \Rightarrow\ 2-\delta\ <\ x\ <\ 2\ \Rightarrow\ \left|\frac{|x-2|}{x-2}-(-1)\right|=\left|\frac{-(x-2)}{x-2}-(-1)\right|=|-1-(-1)|=0<\epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2}=-1$$

Ejemplo Probar que

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x+x^2}{|x|}=-1,\quad |x|\neq 0$$

Solución Sea $\epsilon>0$, sea $\epsilon=\delta>0$ entonces

$$-\delta\ <\ x\ <\ 0\ \Rightarrow\ \left|\frac{x+x^2}{|x|}-(-1)\right|=\left|\frac{x+x^2}{-x}+1\right|=|-1-x+1|=|x|<\delta=\epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x+x^2}{|x|}=-1$$

Teorema 1. *Sea $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $x_0\in D$ se tiene entonces*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0^+}f(x)=L=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$$

Demostración. $\Rightarrow$)Como

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L$$

entonces

$$Dada\quad \epsilon>0\quad \exists\quad \delta_\epsilon>0\ tal\quad que\ \ \forall\ x\in\ Dom_f,\ 0<|x-x_0|<\delta_\epsilon\ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\epsilon$$

entonces $\forall\ x\in Dom_f$,

$$0\ <\ x-x_0\ <\ \delta\ \Rightarrow\ x_0\ <\ x\ <\ x_0+\delta\ \Rightarrow 0\ <|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\epsilon$$

y también

$$0\ <\ x_0-x\ <\ \delta\ \Rightarrow\ -x_0\ <\ -x\ <\ \delta-x_0\ \Rightarrow\ x_0-\delta\ <\ x\ <x_0\ \Rightarrow\ 0\ <|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-L|<\epsilon$$

es decir

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L\quad y\quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=L$$

$\Leftarrow$)Supongamos que

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L\quad y\quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=L$$

Sea $\epsilon > 0$ entonces

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \;\Rightarrow\; \exists\, \delta_1 > 0 \;\; tal \;\; que \;\; \forall x \;\in\; Dom_f, \;\; x_0 - \delta_1 \;<\; x \;<\; x_0 \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$

y también

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \;\Rightarrow\; \exists\, \delta_2 > 0 \;\; tal \;\; que \;\; \forall x \;\in\; Dom_f, \;\; x_0 \;<\; x \;<\; x_0 + \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \epsilon$$

Elegimos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces $\forall\; x \in\; Dom_f$

$$0 \;<\; |x - x_0| \;<\; \delta \;\Rightarrow\; \textit{cualquiera de las dos} \;\; x_0 - \delta \;<\; x \;<\; x_0 \;\; o \;\; x_0 \;<\; x \;<\; x_0 + \delta$$

en cualquiera de los dos casos $|f(x) - L| \;<\; \epsilon$, por lo tanto

$$\forall\; x \in Dom_f, \;\; 0 \;<\; |x - x_0| \;<\; \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| \;<\; \epsilon$$

y por lo tanto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

□

Límites Infinitos

Definición 3. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Se dice que f tiende a ∞ cuando $x \to x_0$, y se escribe*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad si \quad \forall M \;>\; 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \quad 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow f(x) > M$$

Ejemplo Mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Solución *Demostración.* tenemos que si $f(x) > M$ entonces

$$\frac{1}{x^2} > M \Rightarrow \frac{1}{M} > x^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{M}} > x \quad \therefore \quad \delta_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

con esta δ se tiene que:

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{x^2}$$

□

Ejemplo Mostrar que

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{(x - 5)^2} = +\infty$$

Demostración. tenemos que si $f(x) > M$ entonces

$$\frac{1}{(x-5)^2} > M \Rightarrow \frac{1}{M} > (x-5)^2 \Rightarrow \frac{1}{M} > (|x-5|)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{M}} > |x-5| \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

con esta δ se tiene que:

$$|x-5| < \delta \Rightarrow |x-5| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow |x-5|^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow \left|(x-5)^2\right| < \frac{1}{M} \Rightarrow (x-5)^2 < \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{(x-5)^2}$$

$\square$

Definición 4. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Se dice que f tiende a $-\infty$ cuando $x \to x_0$, y se escribe*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad si \quad \forall M > 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

Ejemplo Pruebe que

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^4} = -\infty$$

Solución En este caso se tiene que

$$f(x) < -M \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{(x-1)^4} < -M \;\Leftrightarrow\; M < \frac{1}{(x-1)^4} \;\Leftrightarrow\; (x-1)^4 < \frac{1}{M} \;\Leftrightarrow\; |x-1| < \sqrt[4]{\frac{1}{M}}$$

por lo tanto proponemos $\delta = \sqrt[4]{\frac{1}{M}}$. Tenemos entonces que

$$|x-1| < \delta \;\Rightarrow\; |x-1| < \sqrt[4]{\frac{1}{M}} \;\Rightarrow\; |x-1|^4 < \frac{1}{M} \;\Rightarrow\; (x-1)^4 < \frac{1}{M} \;\Rightarrow\; M < \frac{1}{(x-1)^4} \;\Rightarrow\; \frac{-1}{(x-1)^4} < -M$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^4} = -\infty$$

Ejemplo Pruebe que

$$\lim_{x \to 2} \frac{1-x}{(x-2)^2} = -\infty$$

Solución Para esto se tiene que

$$f(x) < -M \;\Rightarrow\; \frac{1-x}{(x-2)^2} < -M \;\Rightarrow\; \frac{x-1}{(x-2)^2} > M$$

suponemos entonces que $\delta = \frac{1}{2}$, entonces se tiene que

$$0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; 0 < |x-2| < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} < x-1$$

ahora necesitamos que

$$(1-x)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}>\frac{1}{2}\cdot k=M,\quad por\;\; lo\;\; que\;\; k=2M$$

es decir

$$\frac{1}{(x-2)^2}>2M\;\Leftrightarrow\;\frac{1}{2M}>(x-2)^2\;\Leftrightarrow\;\frac{1}{2M}>\left|(x-2)^2\right|\;\Leftrightarrow\;\frac{1}{2M}>|x-2|^2\;\Leftrightarrow\;\frac{1}{\sqrt{2M}}>|x-2|$$

Sea $M>0$ y de esta manera elegimos $\delta=\text{mín}\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2M}}\right\}$, por tanto se tiene

$$0<|x-2|<\delta\;\Rightarrow\;0<|x-2|<\frac{1}{2}\quad y\quad 0<|x-2|<\frac{1}{\sqrt{2M}}$$

$$\Rightarrow\;\frac{1}{2}<x-1\quad y\quad 2M<\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow\;M=\frac{1}{2}\cdot 2M<\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow\;-M>\frac{1-x}{(x-2)^2}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-x}{(x-2)^2}=-\infty$$

Teorema 2. *Suponga que $f(x)>0\;\forall\;x\in\;(x_0-\delta,x_0+\delta)$ donde x_0 es punto del Dom_f, entonces*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty\;\Leftrightarrow\;\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$$

esto quiere decir

$$\forall M>0\in\mathbb{R}\quad\exists\quad\delta>0\quad\ni\quad\forall x\in A\quad con\;\;0<|x-x_0|<\delta\;\Rightarrow f(x)>M$$

si $M>0$ entonces $\frac{1}{M}>0$ y hacemos $\epsilon=\frac{1}{M}$ y tenemos que

$$\forall\;x\in\;Dom_f,\;0<|x-x_0|<\delta\;\Rightarrow\;f(x)>M\;\Rightarrow\;f(x)>\frac{1}{\epsilon}\;\Rightarrow\;\epsilon>\frac{1}{f(x)}\;\Rightarrow\;\left|\frac{1}{f(x)}-0\right|<\epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$$

($\Leftarrow$)
Supongamos que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Sea $M > 0$ y hacemos $\epsilon = \dfrac{1}{M}$, por lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \;\Rightarrow\; \exists\, \delta > 0 \;\ni\; \forall\, x \in \; Dom_f \; 0 \;<\; |x - x_0| \;<\; \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \; \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \frac{1}{M} \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

$\square$

Ejemplo Pruebe que

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-5}{(x-2)^2} = +\infty$$

Solución Tenemos que

$$f(x) = \frac{3x-5}{(x-2)^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)} = \frac{(x-2)^2}{3x-5}$$

en este caso si $x \to 2$ entonces $3x - 5 \to 1$ por lo tanto $\dfrac{1}{f(x)} > 0$ para x cercana a dos.
Como

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{3x-5} = \frac{0}{1} = 0$$

entonces

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-5}{(x-2)^2} = +\infty$$

Límites Laterales Infinitos

Definición 5. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de A. Se dice que f tiende a $+\infty$ cuando $x \to x_0^-$, y se escribe*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \quad si \quad \forall M \;>\; 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \quad x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow f(x) > M$$

Definición 6. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de A. Se dice que f tiende a $-\infty$ cuando $x \to x_0^-$, y se escribe*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \quad si \quad \forall M \;>\; 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \quad x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow f(x) < -M$$

Definición 7. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto de* A. *Se dice que* f *tiende a* $+\infty$ *cuando* $x \to x_0^+$, *y se escribe*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \quad si \quad \forall M \ > \ 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \ \ x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow f(x) > M$$

Definición 8. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in \mathbb{R}$ *un punto de* A. *Se dice que* f *tiende a* $-\infty$ *cuando* $x \to x_0^+$, *y se escribe*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \quad si \quad \forall M \ > \ 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \ \ x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow f(x) < -M$$