Límites Laterales Infinitos

Definición 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de A. Se dice que f tiende a $-\infty$ cuando $x \to x_0^+$, y se escribe*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \quad si \quad \forall M > 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \quad x_0 < x < x_0 + \delta \; \Rightarrow f(x) < -M$$

Teorema 1. *Suponga que $f(x) > 0 \; \forall \; x \in \; x_0 - \delta < x < x_0$ donde x_0 es punto de acumulación del Dom_f, entonces*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Ejemplo Probar que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$$

Solución En este caso utilizaremos el teorema, por un lado se tiene

$$f(x) = \frac{x-2}{x-1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)} = \frac{x-1}{x-2} \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{x-2} = \frac{0}{-1} = 0$$

por otro lado

$$x \to 1^- \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix} x < 1, & \therefore & x - 1 < 0 \\ 2 > x, & \therefore & x - 2 < 0 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{x-2}{x-1} > 0 \textit{ cuando } x \to 1^-$$

por lo tanto según el teorema

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$$

Definición 2. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de A. Se dice que f tiende a $-\infty$ cuando $x \to x_0^-$, y se escribe*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \quad si \quad \forall M > 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \quad x_0 - \delta < x < x_0 \; \Rightarrow f(x) < -M$$

Teorema 2. *Suponga que $f(x) < 0 \; \forall \; x \in \; x_0 - \delta < x < x_0$ donde x_0 del Dom_f, entonces*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Ejemplo Probar que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2-x}{x-1} = -\infty$$

Solución En este caso utilizaremos el teorema, por un lado se tiene

$$f(x) = \frac{2-x}{x-1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)} = \frac{x-1}{2-x} \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{2-x} = \frac{0}{1} = 0$$

por otro lado

$$x \to 1^- \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix} x < 1, & \therefore & x-1<0 \\ 2 > x, & \therefore & 2-x>0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{2-x}{x-1} < 0 \textit{ cuando } x \to 1^-$$

por lo tanto según el teorema

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2-x}{x-1} = -\infty$$

Definición 3. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f: A \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de A. Se dice que f tiende a $+\infty$ cuando $x \to x_0^+$, y se escribe*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \quad si \quad \forall M > 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \quad x_0 < x < x_0+\delta \;\Rightarrow f(x) > M$$

Teorema 3. *Suponga que $f(x) > 0 \; \forall \; x_0 < x < x_0 + \delta$ donde x_0 es punto del Dom_f, entonces*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Ejemplo Probar que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2-x}{x-1} = +\infty$$

Solución En este caso utilizaremos el teorema, por un lado se tiene

$$f(x) = \frac{2-x}{x-1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)} = \frac{x-1}{2-x} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{2-x} = \frac{0}{1} = 0$$

por otro lado

$$x \to 1^+ \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix} x > 1, & \therefore & x-1>0 \\ 2 > x, & \therefore & 2-x>0 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{2-x}{x-1} > 0 \textit{ cuando } x \to 1^+$$

por lo tanto según el teorema

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2-x}{x-1} = +\infty$$

Definición 4. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f: A \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de A. Se dice que f tiende a $-\infty$ cuando $x \to x_0^+$, y se escribe*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \quad si \quad \forall M > 0 \in \mathbb{R} \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in A \quad con \quad x_0 < x < x_0+\delta \;\Rightarrow f(x) < -M$$

Teorema 4. *Suponga que $f(x) < 0 \; \forall \; x_0 < x < x_0 + \delta$ donde x_0 es punto del Dom_f, entonces*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Ejemplo Probar que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$$

Solución En este caso utilizaremos el teorema, por un lado se tiene

$$f(x)=\frac{x-2}{x-1}\;\Rightarrow\;\frac{1}{f(x)}=\frac{x-1}{x-2}\;\Rightarrow\;\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-2}=\frac{0}{-1}=0$$

por otro lado

$$x\to 1^+\;\Rightarrow\;\begin{Bmatrix} x>1, & \therefore & x-1>0\\ 2>x, & \therefore & x-2<0\end{Bmatrix}\;\Rightarrow\; f(x)=\frac{x-2}{x-1}<0 \textit{ cuando } x\to 1^+$$

por lo tanto según el teorema

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-2}{x-1}=-\infty$$

Límites en el Infinito

Definición 5. *Sea $A\subset\mathbb{R}$, sea $f:A\to\mathbb{R}$. Se dice que $L\in\mathbb{R}$ es límite de f cuando $x\to\infty$ y se escribe*

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L\quad si\quad \forall\epsilon>0\quad\exists\quad N>0\quad\ni\quad\forall x\;\in\;Dom_f,\; x>N\;\Rightarrow\;|f(x)-L|<\epsilon$$

Ejemplo Mostrar que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$$

Demostración. Tenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=1$$

para comprobarlo usamos la definición primero se tiene que:

$$\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|=\left|\frac{x-1-(x-2)}{x+2}\right|=\left|\frac{-3}{x+2}\right|=\frac{3}{x+2}<\frac{3}{x}$$

por lo que

$$\frac{3}{x}<\epsilon\Rightarrow\frac{3}{\epsilon}<x\quad\therefore\quad N=\frac{3}{\epsilon}$$

de esta manera, si $\epsilon>0$ elegimos $N=\dfrac{3}{\epsilon}$ por lo que

$$x>N\;\Rightarrow\;x>\frac{3}{\epsilon}\;\Rightarrow\;\frac{3}{x+2}<\frac{3}{x}<\epsilon\;\Rightarrow\;\left|\frac{-3}{x+2}\right|<\epsilon\;\Rightarrow\;\left|\frac{x-1}{x+2}-1\right|<\epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+2}=1$$

□

Definición 6. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es límite de f cuando $x \to -\infty$ y se escribe*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad si \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad N > 0 \quad \ni \quad \forall x \ \in \ Dom_f, \ x < -N \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon$$

Ejemplo Mostrar que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$$

Demostración. Tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

para comprobarlo usamos la definición primero se tiene que:

$$\left|\frac{x-1}{x+2} - 1\right| = \left|\frac{x - 1 - (x-2)}{x+2}\right| = \left|\frac{-3}{x+2}\right|$$

como $x \to -\infty$ se toma $x < -2$ por lo que $x + 2 < 0$ y por lo tanto $-(x+2) > 0$, de esta manera

$$\left|\frac{-3}{x+2}\right| = \left|\frac{3}{-(x+2)}\right| = \frac{3}{|-(x+2)|} = \frac{3}{-(x+2)}$$

por lo que

$$\frac{3}{-(x+2)} < \epsilon \Rightarrow \frac{3}{\epsilon} < -x - 2 \ \Rightarrow \ \frac{3}{\epsilon} + 2 < -x \ \Rightarrow \ -\left(\frac{3}{\epsilon} + 2\right) > x$$

de esta manera, si $\epsilon > 0$ elegimos $N = \dfrac{3}{\epsilon} + 2$ por lo que

$$x < -N \ \Rightarrow \ x < -\left(\frac{3}{\epsilon} + 2\right) \ \Rightarrow \ -x-2 > \frac{3}{\epsilon} \ \Rightarrow \ \frac{3}{-(x+2)} < \epsilon \ \Rightarrow \ \left|\frac{-3}{x+2}\right| < \epsilon \ \Rightarrow \ \left|\frac{x-1}{x+2} - 1\right| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$$

□

Ejemplo Probar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

Solución *Demostración.* para comprobarlo usamos la definición primero se tiene que:

$$\left|\frac{1}{x^2-1} - 0\right| = \left|\frac{1}{x^2-1}\right| = \frac{1}{|x^2-1|}$$

como $x \to \infty$ entonces tomamos $x > 1$ por lo que $x^2 - 1 > 0$ y de esta manera

$$\frac{1}{|x^2-1|} = \frac{1}{x^2-1}$$

por lo tanto

$$\frac{1}{x^2-1} < \epsilon \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\epsilon}+1} < x \quad \therefore \quad N = \sqrt{\frac{1}{\epsilon}+1}$$

de esta manera

$$x > N \;\Rightarrow\; x > \sqrt{\frac{1}{\epsilon}+1} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^2-1} < \epsilon$$

por lo que

$$|f(x)-L| = \left|\frac{1}{x^2-1} - 0\right| = \frac{1}{x^2-1} < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

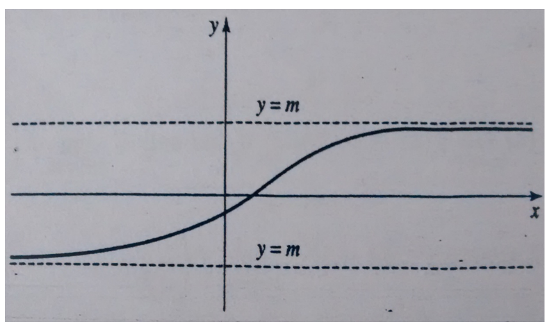
$\square$

Asintotas Horizontales

Definición 7. $\mathbb{R}$ *Sea* $A \subset \mathbb{R}$, *sea* $f : A \to \mathbb{R}$. *Si*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = m \quad y/ó \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = m$$

entonces la recta $y = m$ *es llamada una* ***asintota horizontal*** *de* $f(x)$



Ejemplo Probar que la recta $y = 1$ es una asintota horizontal para la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$

Solución En este caso tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

Demostración. para comprobarlo usamos la definición primero se tiene que:

$$\left|\frac{x}{x+2}-1\right| = \left|\frac{x-(x+2)}{x+2}\right| = \left|\frac{-2}{x+2}\right| = \frac{2}{|x+2|}$$

como $x \to \infty$, tomamos $x > 2$ por lo que $x+2 > 0$, por lo tanto

$$\frac{2}{|x+2|} = \frac{2}{x+2} < \frac{2}{x}$$

dada $\epsilon > 0$ se tiene

$$\frac{2}{x} < \epsilon \;\Rightarrow\; \frac{2}{\epsilon} < x$$

por lo que elegimos $N = \frac{2}{\epsilon}$, de esta manera

$$x > N \;\Rightarrow\; x > \frac{2}{\epsilon} \;\Rightarrow\; \frac{2}{x+2} < \frac{2}{x} < \epsilon \;\Rightarrow\; \left|\frac{-2}{x+2}\right| < \epsilon \;\Rightarrow\; \left|\frac{x}{x+2}-1\right| < \epsilon$$

por lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+2} = 1$$

y concluimos que $y = 1$ es una asintota horizontal para

$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$

□

También podemos ver que ocurre cuando $x \to -\infty$, en este caso se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{x}} = 1$$

Demostración. para comprobarlo usamos la definición primero se tiene que:

$$\left|\frac{x}{x+2}-1\right| = \left|\frac{x-(x+2)}{x+2}\right| = \left|\frac{-2}{x+2}\right| = \frac{2}{|-(x+2)|}$$

como $x \to -\infty$, tomamos $x < -2$ por lo que $x+2 < 0$, por lo tanto

$$\frac{2}{|-(x+2)|} = \frac{2}{-(x+2)}$$

dada $\epsilon > 0$ se tiene

$$\frac{2}{-(x+2)} < \epsilon \;\Rightarrow\; \frac{2}{\epsilon} < -x-2 \;\Rightarrow\; \frac{2}{\epsilon}+2 < -x \;\Rightarrow\; x < -\left(\frac{2}{\epsilon}+2\right)$$

por lo que elegimos $N = \dfrac{2}{\epsilon} + 2$, de esta manera

$$x < -N \Rightarrow x < -\left(\frac{2}{\epsilon} + 2\right) \Rightarrow x+2 < -\frac{2}{\epsilon} \Rightarrow -(x+2) > \frac{2}{\epsilon} \Rightarrow \frac{2}{-(x+2)} < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{-2}{x+2}\right| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{x+2} - 1\right| < \epsilon$$

por lo que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+2} = 1$$

y concluimos que $y = 1$ es una asintota horizontal para

$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$

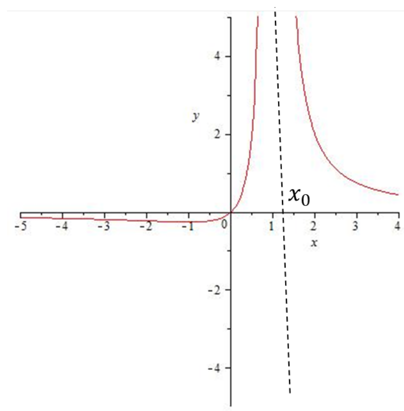
$\square$

Asistotas Verticales

Definición 8. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

*entonces $x = x_0$ es llamada una **asintota vertical** de $f(x)$*



Ejemplo Probar que la recta $x = 1$ es una asintota vertical para la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

Solución Tenemos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x} = 0$$

En este caso

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

ademas

$$x \Rightarrow +\infty \;\Rightarrow\; \left\{\begin{matrix}(x-1)^2 > 0\\ x > 0\end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} > 0$$

por lo que

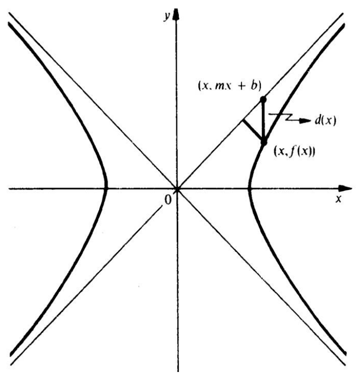
$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-1)^2} = +\infty$$

por lo tanto $x = 1$ es una asintota vertical para

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

Asistotas Oblicuas

Definición 9. *Una recta no vertical $y = mx + b$ es una asitota de la gráfica de f, si cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$, la distancia de $(x, f(x))$ a la recta $(x, mx + b)$ tiende a cero*



sea $d(x)$ la distancia de $(x, f(x))$ a la recta $y = mx + b$ entonces

$$d = \frac{|f(x) - mx - b|}{\sqrt{m^2+1}}$$

por lo que la recta es asintota de f en x si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx - b = 0$$

De esto mismo podemos determinar los coeficientes m y b de la recta, de la siguiente manera

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx - b = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} = 0$$

pero

$$\frac{b}{x} = 0 \quad si \quad x \to \infty \quad \therefore \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

y de

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx - b = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = b$$

Ejemplo Hallar las asintotas oblicuas de $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

Solución Para esto se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

$\therefore m=1$ Mientras que

$$\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}-(1)x=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

$\therefore b=0 \therefore$ la recta $y=x$ es una asintota oblicua para f.
Por otro lado tenemos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{-(-x)}=-\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{(-x)^2}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-1$$

$\therefore m=-1$
Mientras que

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-1}-(-1)x=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0$$

$\therefore b=0 \therefore$ la recta $y=-x$ es una asintota oblicua para f.