Álgebra de Límites Infinitos

Teorema 1. *Supongamos que* $\lim_{x\to x_0 f(x)=+\infty}$, $\lim_{x\to x_0 g(x)=+\infty}$, $\lim_{x\to x_0 h(x)=-\infty}$ *y* $\lim_{x\to x_0 k(x)=-\infty}$ *entonces*
(a) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$
(b) $\lim\limits_{x\to x_0}(h(x)+k(x))=-\infty$
(c) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=+\infty$
(d) $\lim\limits_{x\to x_0}(h(x)\cdot k(x))=+\infty$
(e) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot h(x))=-\infty$

Demostración. (a) se tiene que

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))=+\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M>0\ \exists\,\delta_1>0,\ \ tal\ \ que\ \ |x-x_0|<\delta_1 \;\Rightarrow\; f(x)>M$$

$$\lim_{x\to x_0}(g(x))=+\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M>0\ \exists\,\delta_2>0,\ \ tal\ \ que\ \ |x-x_0|<\delta_2 \;\Rightarrow\; g(x)>M$$

Elegimos $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ de manera que

$$|x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; f(x)>M\ \ y\ \ g(x)>M$$

$$\Rightarrow\; f(x)+g(x)>2M>M$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$$

(b) se tiene que

$$\lim_{x\to x_0}(h(x))=-\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M>0\ \exists\,\delta_1>0,\ \ tal\ \ que\ \ |x-x_0|<\delta_1 \;\Rightarrow\; h(x)<-M$$

$$\lim_{x\to x_0}(k(x))=-\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M>0\ \exists\,\delta_2>0,\ \ tal\ \ que\ \ |x-x_0|<\delta_2 \;\Rightarrow\; k(x)<-M$$

Elegimos $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ de manera que

$$|x-x_0|<\delta \;\Rightarrow\; h(x)<-M\ \ y\ \ k(x)<-M$$

$$\Rightarrow\; h(x)+k(x)<-2M<-M$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to x_0}(h(x)+k(x))=-\infty$$

(c) se tiene que

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))=+\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M>0\ \exists\,\delta_1>0,\ \ tal\ \ que\ \ |x-x_0|<\delta_1 \;\Rightarrow\; f(x)>\sqrt{M}$$

$$\lim_{x\to x_0}(g(x))=+\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M>0\ \exists\,\delta_2>0,\ \ tal\ \ que\ \ |x-x_0|<\delta_2 \;\Rightarrow\; g(x)>\sqrt{M}$$

Elegimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ de manera que

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M \;\; y \;\; g(x) > M$$

$$\Rightarrow\; f(x) \cdot g(x) > \sqrt{M} \cdot \sqrt{M} = M$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$$

(d) se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} (h(x)) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M > 0 \;\; \exists\, \delta_1 > 0, \;\; tal \;\; que \;\; |x - x_0| < \delta_1 \;\Rightarrow\; h(x) < -\sqrt{M} \;\Rightarrow\; \sqrt{M} < -h(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} (k(x)) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M > 0 \;\; \exists\, \delta_2 > 0, \;\; tal \;\; que \;\; |x - x_0| < \delta_2 \;\Rightarrow\; k(x) < -\sqrt{M} \;\Rightarrow\; \sqrt{M} < -k(x)$$

Elegimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ de manera que

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; \sqrt{M} < -h(x) \;\; y \;\; \sqrt{M} < -k(x)$$

$$\Rightarrow\; M < (-h(x)) \cdot (-k(x)) = (h(x)) \cdot (k(x))$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to x_0} (h(x) \cdot k(x)) = +\infty$$

(e) se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)) = +\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M > 0 \;\; \exists\, \delta_1 > 0, \;\; tal \;\; que \;\; |x - x_0| < \delta_1 \;\Rightarrow\; f(x) > M$$

$$\lim_{x \to x_0} (k(x)) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M > 0 \;\; \exists\, \delta_2 > 0, \;\; tal \;\; que \;\; |x - x_0| < \delta_2 \;\Rightarrow\; k(x) < -M$$

tomamos $M = 1$ por lo que

$$\lim_{x \to x_0} (k(x)) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \forall M > 0, \;\; M = 1 \;\; \exists\, \delta_2 > 0, \;\; tal \;\; que \;\; |x - x_0| < \delta_2 \;\Rightarrow\; k(x) < -1$$

Elegimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ de manera que

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M \;\; y \;\; k(x) < -1$$

$$\Rightarrow\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; f(x) > M \;\; y \;\; -k(x) > 1$$

$$\Rightarrow\; (f(x)) \cdot (-k(x)) > M$$

$$\Rightarrow\; f(x)k(x) < -M$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot k(x)) = -\infty$$

$\square$

Los resultados anteriores los podemos resumir en la tabla

$$\begin{gathered}
(+\infty)+(+\infty)=+\infty \\
(-\infty)+(-\infty)=+\infty \\
(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty \\
(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty \\
(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty
\end{gathered}$$

Formas Indeterminadas

Dadas las siguientes expresiones

$$0\cdot\infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

cuando se interpreta correctamente, puede tomar cualquier valor finito, infinito o incluso no existir, dependiendo de las circunstancias. Por esta razón, las expresiones se denominan formas indeterminadas

Ejemplo Si $f(x)=cx$ y $g(x)=x$ entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} cx=0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x=0$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{cx}{x}=c$$

Ahora bien Si $f(x)=x$ y $g(x)=x^2$ entonces

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

Finalmente Si $f(x)=x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ y $g(x)=x$ entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} x=0$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \textit{el} \quad \textit{cual} \quad \nexists$$

Si tenemos que

$$f(x) \to 0 \quad si \quad x \to \; x_0$$

$$g(x) \to 0 \quad si \quad x \to x_0$$

y en este caso

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad se \quad puede \quad interpretar \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \quad se \quad puede \quad interpretar \quad 0 \cdot \infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \quad se \quad puede \quad interpretar \quad \frac{\infty}{\infty}$$