Números Naturales $\mathbb{N}$

Definición 1. *Dado un campo ordenado F, y un subconjunto $A \subset F$ se dice A es inductivo cuando verifica las dos condiciones siguientes:*
a) $1 \in A$
b) $\forall x \in F,\ x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$

Ejemplo 1 El conjunto $\mathbb{R}$ es un conjunto inductivo

Ejemplo 2 El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ es un conjunto inductivo

Ejemplo 3 El conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ es un conjunto inductivo

Teorema 1. *Si $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos inductivos de F, entonces $\bigcap \mathcal{C}$ es un conjunto inductivo*

Demostración. (i) Tenemos que $\forall c \in \mathcal{C}$ se tiene que $1 \in c$ pues c es inductivo por lo tanto

$$1 \in \bigcap \mathcal{C}$$

(ii) Supongamos que $x \in \bigcap \mathcal{C}$. Sea $c \in \mathcal{C}$ entonces $x \in\ c$ como c es inductivo $x + 1 \in c$ por lo tanto es cierto que

$$\forall\ c \in \mathcal{C}, \quad x + 1 \in \bigcap \mathcal{C}$$

□

Definición 2. *El conjunto de números naturales de un campo ordenado F es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de F*

$$\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{C}$ denota la colección de todos los subconjuntos inductivos de F, y a los elementos de $\mathbb{N}$ los llamamos números naturales
Obs. Los números naturales no satisfacen todas las propiedades que definen un campo, pero tienen propiedades que se estudiaran.

Teorema 2. *El conjunto de números naturales es el más pequeño subconjunto inductivo de un campo F, en el sentido de que $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo y para todo subconjunto inductivo $A \subset F$ se tiene $\mathbb{N} \subset A$*

Demostración. Según el teorema anterior $\mathbb{N}$ es un conjnuto inductivo, ahora tomamos un $\mathrm{C} \in\ S$ donde S representa una colección de todos los subconjuntos inductivos de F. Se tiene entonces que $\bigcap S \subset \mathcal{C}$ por lo tanto $\mathbb{N} \subset \mathcal{C}$ □

Teorema 3. *En algún campo ordenado F*
(a) $\mathbb{N}$ es cerrado bajo la suma

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ un elemento fijo, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ sea $p(m)$ la propiedad $n + m \in \mathbb{N}$.
Tenemos entonces que
(1) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces al ser $\mathbb{N}$ inductivo se cumple $(n + 1) \in \mathbb{N}$ por lo tanto $p(1)$ es verdadera
(2) Supongamos que $p(k)$ es verdadera, esto quiere decir que $(n + k) \in \mathbb{N}$ y al ser $\mathbb{N}$ inductivo se cumple $(n + k) + 1 \in \mathbb{N}$ esto es
$p(k+1)$ es verdadera. Por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow\ p(k+1)$ y por el principio de inducción matemática $\forall\ m \in \mathbb{N}$ $p(m)$ es verdadera por lo tanto $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ se tiene $(n + m) \in \mathbb{N}$ □

Teorema 4. *En algún campo ordenado F*
(b) $\mathbb{N}$ es cerrado bajo la multiplicación

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ un elemento fijo, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ sea $p(m)$ la propiedad $nm \in \mathbb{N}$.
Tenemos entonces que
(1) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces al ser $n = n \cdot 1 \in \mathbb{N}$ se tiene $p(1)$ es verdadera
(2) Supongamos que $p(k)$ es verdadera, esto quiere decir que $(nk) \in \mathbb{N}$ y si $n \in \mathbb{N}$ se cumple $(nk) + n \in \mathbb{N}$ esto es
$n(k+1) \in \mathbb{N}$ por tanto $p(k+1)$ es verdadera. Por lo tanto $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ y por el principio de inducción matemática $\forall\ m \in \mathbb{N}$ $p(m)$ es verdadera por lo tanto $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ se tiene $(nm) \in \mathbb{N}$ □

Teorema 5. *En algun campo ordenado F*
(a) Todos los números naturales son positivos

Demostración. Dado que

$$(1) \quad 1 > 0 \ \ se \ \ tiene \ \ que \ \ 1 \in P$$

$$(2) \quad Si\ k \in \ P, \ \ y \ \ 1 \in \ P \ \ entonces \ \ k+1 \in P$$

por lo tanto $\forall\ k \in \mathbb{N}$ si $k \in \ P \ \Rightarrow \ (k+1) \in \ P$ entonces la propiedad P es un conjunto inductivo por lo tanto $\mathbb{N} \subset \ P$ y por lo tanto $\forall\ n \in \mathbb{N}$ n es positivo □

Teorema 6. *En algun campo ordenado F*
(a) Los números naturales no son cerrados bajo sustracción y división

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ un elemento fijo y $\forall\ m \in \mathbb{N}$ definimos la propiedad $n - m \in \mathbb{N}$.
Tenemos que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple solo una de las siguientes:

$$n < m, \quad n = m, \quad n > m$$

para el $n = 1$ y $m = 1$ se tiene $1 - 1 \in \mathbb{N}$ lo cual no ocurre.
En el caso $n < m$ se tendría $n - m \in \mathbb{N}$ lo cual no ocurre.
Y en el caso de la división se tiene

$$1 \div 2 = 1 \cdot 2^{-1} \notin \mathbb{N}$$

pues en $\mathbb{N}$ no hay inversos multiplicativos. □

Teorema 7. *El número 1 es el más pequeño de los números naturales*

Demostración. Definimos el conjunto

$$A = \{x \in F \mid x \geq 1\}$$

entonces

$$1 \geq 1 \ \Rightarrow \ 1 \in A$$

Suponemos que $k \geq 1$ entonces $k + 1 \geq 1 + 1 > 1$ es decir $k + 1 \geq 1$ por lo tanto

$$k \in A \ \Rightarrow \ k + 1 \in A$$

$\therefore$ A es inductivo y como $\mathbb{N} \subset A$ entonces $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$ □

Teorema 8. *Principio de Inducción Matemática Dada una proposición P. Se tiene que P es válida* $\forall \ n \in \mathbb{N}$ *si:*

$$(1) \quad p(1) \quad es \quad verdadera$$

$$(2) \quad \forall \ k \in \mathbb{N}, \quad p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$$

entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ *es verdadera*

Demostración. Suponga que se tiene una proposición P que satisface (1), (2). Sea

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid p(x) \quad es \quad verdadera\}$$

(i) $1 \in A$ por (1)
(ii) Suponemos que $x \in A$. Entonces $x \in \mathbb{N}$ y $p(x)$ es verdadera, por (2) $p(x+1)$ es verdadera. Esto es $x+1 \in A$. Por lo tanto se ha probado que

$$x \in A \ \Rightarrow \ x+1 \in A$$

entonces A es un conjunto inductivo $\therefore \mathbb{N} \subset A$. Esto es $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadera □

Definición 3. *Definimos* a^n, $\forall \ n \in \mathbb{N}$ *como:*
(1) $a^1 = a$
(2) $\forall \ k \in \mathbb{N}, \quad a^{k+1} = a^k a$

Teorema 9. $\forall \ n, m \in \mathbb{N} \ a^m a^n = a^{n+m}$

Demostración. Procediendo por inducción sobre m y fijando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(1) \quad a^n a^1 = a^n a = a^{n+1} \ \Rightarrow \ p(1) \quad es \quad verdadera$$

Suponemos para $k \in \mathbb{N}$ que $p(k)$ es verdadera esto es:

$$a^n a^k = a^{n+k}$$

a partir de esto se tiene que

$$a^n a^k = a^{n+k} \ \Rightarrow \ a^n a^k a = a^{n+k} a \ \Rightarrow \ a^n a^{k+1} = a^{n+k+1}$$

por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$ por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall \ n \in \mathbb{N}$ □

Teorema 10. $\forall \ n, m \in \mathbb{N} \ (a^m)^n = a^{nm}$

Demostración. Procediendo por inducción sobre m y fijando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(1) \quad (a^n)^1 = a^m = a^{n \cdot 1} \ \Rightarrow \ p(1) \quad es \quad verdadera$$

Suponemos para $k \in \mathbb{N}$ que $p(k)$ es verdadera esto es:

$$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$$

a partir de esto se tiene que

$$(a^n)^k = a^{n \cdot k} \ \Rightarrow \ (a^n)^k a^n = a^{n \cdot k} a^n \ \Rightarrow \ (a^n)^{k+1} = a^{n \cdot k + n} = a^{n \cdot (k+1)}$$

por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$ por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall \ n \in \mathbb{N}$ □

Teorema 11. $\forall\ n, m \in \mathbb{N}\ a^n b^n = (ab)^n$

Demostración. Procediendo por inducción sobre m y fijando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(1) \quad a^1 b^1 = ab = (ab)^1 \ \Rightarrow \ p(1) \ \ es \ \ verdadera$$

Suponemos para $k \in \mathbb{N}$ que $p(k)$ es verdadera esto es:

$$a^k b^k = (ab)^k$$

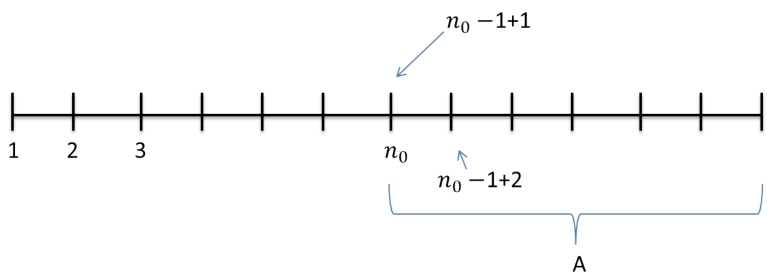
a partir de esto se tiene que

$$a^k b^k = (ab)^k \ \Rightarrow \ a^k b^k ab = (ab)^k ab \ \Rightarrow \ a^k a b^k b = (ab)^{k+1} \ \Rightarrow \ a^{k+1} b^{k+1} = (ab)^{k+1}$$

por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$ por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$ □

Teorema 12. *Principio de Inducción Completa Suponga que $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\forall\ n \in \mathbb{N}, \ \ n \geq n_0$, $p(n)$ es una proposición verdadera acerca de n si:*
(1) $p(n_0)$ es verdadera
(2) $\forall\ k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$ $p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$ entonces $\forall\ n \geq n_0$, $p(n)$ es verdadera

Demostración. Sea A el conjunto de números naturales que contiene a n_0, y contiene a $k+1$ siempre que contiene a k.



Sea B el conjunto de todos números naturales ℓ tales que $n_0 - 1 + \ell$ esta en A. Entonces 1 esta en B y $\ell + 1$ esta en B si ℓ esta en B, de modo que B es inductivo, por lo tanto contiene a todos los números naturales, lo cual significa que A contiene todos los números natruales $\geq n_0$ □

Ejercicio Demuestre usando el pricipio de inducción completa que

$$2^n > 2n + 1 \quad \forall \ \ n \geq 3$$

Solución Dado que $2^3 = 8 > 7 = 2(3) + 1$ entonces $p(3)$ es verdadera.
Supongo ahora $p(k)$ esto es $2^k > 2k + 1$ y tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{c} 2^k > 2k + 1 \\ 2^k > 2 \end{array} \right\} \ \Rightarrow \ 2^k + 2^k > 2k + 1 + 2 \ \Rightarrow \ 2^{k+1} > 2(k+1) + 1$$

esto es $p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$ para toda $k \geq 3$