Axiomas de orden

Definición 1. *un campo de F se dice que está ordenado con respecto a un determinado subconjunto $P \subset F$ si el subconjunto P satisface los siguientes axiomas*

(O_1) $\forall\ x, y\ \in\ P$, $x + y \in\ P$ *(P es cerrado bajo $+$)*

(O_2) $\forall\ x, y\ \in\ P$, $x \cdot y \in\ P$ *(P es cerrado bajo $\cdot$)*

(O_3) $\forall\ x\ \in\ F$, *ocurre una y solo de las siguientes*

$$x \in\ P, \quad -x \in\ P, \quad o \quad x = 0 \quad Ley\ \ de\ \ Tricotomia$$

Definición 2. *Si $x \in\ P$ decimos que x es positivo, si $-x \in P$ decimos que x es negativo. Por lo tanto, la ley de tricotomía dice que cada elemento de un campo ordenado puede ser positivo, negativo o cero, pero no más de una de ellas*

Definición 3. *Dados x, y en un campo ordenado F decimos que x e y tienen el mismo signo si $x, y \in P$ o $-x, -y \in P$ decimos que x e y tienen signos opuestos si $-x, y \in P$ o $x, -y \in P$*

Definición 4. *(Mayor que, Menor que, etc.) Definimos los simbolos $<$, $<$, $\leq$, $\geq$ en un campo ordenado F de la siguiente manera $x < y$ si $y - x \in P$*
$x > y$ si $y < x$
$x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$
$x \geq y$ si $x > y$ o $x = y$

Teorema 1. *Sean x, y elementos de un campo ordenado F. Entonces*
(a) $x > 0$ si y solo si $x \in P$; $x < 0$ si y solo si $-x \in P$.
(b) Una y solo una de las siguientes propiedades se cumple

$$x < y, \quad x > y, \quad x = y$$

(c) $x \leq y$ si y solo si $x \not> y$, $\quad x \geq y$ si y solo si $x \not< y$
(d) Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$

Demostración. **(a)** Tenemos que

$$0 < x \ \Leftrightarrow\ x - 0 \in\ P \ \Leftrightarrow\ x + (-0) \in\ P \ \Leftrightarrow\ x + 0 \in\ P \ \Leftrightarrow\ x \in\ P$$

$$x < 0 \ \Leftrightarrow\ 0 - x \in\ P \ \Leftrightarrow\ -x + 0 \in\ P \ \Leftrightarrow\ -x \in\ P$$

(b) Por O_3 ocurre solo una de las siguientes

$$y - x \in\ P, \quad x - y \in\ P, \quad y - x = 0$$

(c) Tenemos que

$$x \leq y \ \Leftrightarrow\ x < y \ \ o \ \ x = y \ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix} si \ \ x < y \ \ entonces \ \ x \not> y \\ si \ \ x = y \ \ entonces \ \ x \not> y \end{matrix}\right\} \ \Rightarrow\ x \not> y$$

$$x \geq y \ \Leftrightarrow\ x > y \ \ o \ \ x = y \ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix} si \ \ x > y \ \ entonces \ \ x \not< y \\ si \ \ x = y \ \ entonces \ \ x \not< y \end{matrix}\right\} \ \Rightarrow\ x \not< y$$

(d) Supongamos que $x \leq y$ y $y \leq x$. Por contradicción suponemos que $x \neq y$. Entonces por hipótesis se cumple $x > y$ y $y < x$ y esto no puede ocurrir por tricotomia

$\square$

Teorema 2. *En algún campo ordenado F se cumple*
(a) La suma de dos elementos negativos es negativo
(b) El producto de dos elementos negativos es positivo
(c) El cuadrado de un elemento diferente de cero es positivo
(d) El producto de un elemento positivo y un elemento negativo es negativo
(e) $\forall\ x, y \in\ F$, si $xy > 0$, entonces x e y tienen el mismo signo
(f) $\forall\ x, y \in\ F$,si $xy < 0$, entonces x e y tienen diferente signo

Demostración. **(a)** Supongamos que x,y son elementos negativos. Por definición $-x \in P$ y $-y \in P$ por O_1 se tiene que $(-x) + (-y) \in\ P$ esto es $-(x + y) \in P$. Por definición de negativo se tiene que $x + y$ es negativo

(b) Tenemos que

$$x, y \ \ negativos \ \ \Rightarrow \ \ -x, -y \in P \ \Rightarrow \ (-x)(-y) \in P \ \Rightarrow \ xy \in P$$

(c) Supongamos $x \neq 0$. Por tricotomia $x \in P$ o $-x \in P$ entonces
Caso 1
$x \in P \ \Rightarrow \ x^2 \in P$
Caso 2
$-x \in P \ \Rightarrow \ (-x)^2 \in P \ \ pero \ \ (-x)^2 = x^2$

(d) Supongamos que $x \in P$ y $-y \in P$ por lo tanto $(x)(-y) \in P \ \Rightarrow \ -xy \in P \ \Rightarrow \ xy \ \ es \ \ negativo$

(e) Supongamos que $xy > 0$. Entonces $x, y \neq 0$ si x, y no tienen el mismo signo a lo más uno es positivo y otro negativo y el producto de estos elementos es negativo según (d)

(f) Supongamos que $xy > 0$ entonces $-xy \in P$ esto quiere decir que $(-x) \in P$ y $y \in P$ o $x \in P$ y $-y \in P$ pues $-xy = (-x)(y) = (x)(-y)$ y por lo tanto x, y tiene signos contrarios

$\square$